QUELQUES REMARQUES SUR UN THÉORÈME RELATIF A LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE ET SUR LA SÉRIE DE KUMMER

Autor(en): **Cailler, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1920-1921)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515721

QUELQUES REMARQUES SUR UN THÉORÈME RELATIF A LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE ET SUR LA SÉRIE DE KUMMER

PAR

C. Cailler (Genève).

I. — A la suite des recherches de M. J. Hadamard, je suis parvenu, il y a quelques années, à la relation suivante.

Soit

$$\Phi(x, y, z) = F(\alpha, \beta, \gamma, xz)F(\alpha', \beta', \gamma', y(1-z)) ;$$

on a

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1}\Phi(x, y, z)dz$$

$$= \frac{(\gamma-1)!(\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!}(1-y)^{\alpha-\beta'}F(\alpha, \beta, \gamma+\gamma', x+y-xy) . \qquad (1)$$

Le fait que le second nombre est hypergéométrique relativement à la combinaison $x + y - xy = 1 - (1 - x)(1 - y)$ est fort remarquable. Malheureusement le résultat ci-dessus n'est pas général. Outre les conditions de convergence de l'intégrale, lesquelles sont naturellement supposées, il faut pour la validité de (1) que les paramètres obéissent aux conditions

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' . \qquad (2)$$

Mon attention ayant été récemment appelée de nouveau sur le théorème (1), j'ai essayé de le généraliser en supprimant les restrictions (2). Pour qu'une semblable généralisation offre quelque intérêt, il faut évidemment que le second membre reste une fonction simple de la quantité $x + y - xy$. Or j'ai eu beau modifier la forme de la fonction Φ, et changer les limites de l'intégration, toutes mes tentatives ont invariablement échoué; il semble que les conditions (2) soient nécessaires et jusqu'ici l'équation (1) reste seule de son espèce.

En revanche, j'ai trouvé que l'intégrale du premier membre de (1) peut revêtir une autre forme, valable pour tous les α, β, γ, α', β', γ' qui assurent la convergence; cette nouvelle forme est encore une intégrale définie, la suivante

$$C(1-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha'-\beta'}\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{a+b-1}\,H(x,y,z)\,dz\,. \qquad (3)$$

La signification des lettres est consignée dans le tableau

$$\begin{gathered}H(x,y,z)\\ = F(\alpha+a-\beta,\,b,\,a+b,\,1-z)\,F(a+\alpha,\,b+\beta,\,\gamma+\gamma',\,x(1-y)z+y)\end{gathered}$$

$$a=\gamma+\gamma'-\alpha-\alpha'\,,\qquad b=\gamma+\gamma'-\beta-\beta'\,,$$

$$C=\frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!}\,\frac{(a+\alpha-1)!\,(b+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!\,(a+b-1)!}\,.$$

Il est clair qu'on peut obtenir plusieurs égalités analogues, en alternant entre elles les lettres α et β, ou α' et β', ou encore en permutant les deux séries α, β, γ, x et α', β', γ', y. En outre, les propriétés connues de la fonction F permettent d'écrire (3) sous plusieurs formes équivalentes; en faisant, par exemple

$$\begin{gathered}L(x,y,z)\\ = F(a+\alpha-\beta,\,b,\,a+b,\,1-z)\,F(\alpha',\,\beta',\,\gamma+\gamma'\,xz(1-y)+y)\,,\end{gathered}$$

on a, au lieu de (3), l'expression

$$C\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{a+b-1}(1-xz)^{\alpha'+\beta'-\gamma-\gamma'}\,L(x,y,z)\,dz\,. \qquad (4)$$

Le procédé, tout élémentaire, par lequel j'ai établi autrefois la relation (1) s'applique avec le même succès à la démonstration de l'égalité nouvelle

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1}\Phi\,dz = C(1-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha'-\beta'}\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{a+b-1}H\,dz\,. \qquad (5)$$

Faisons d'abord $x = 0$, le premier membre se réduit à

$$\int_0^1 z^{\gamma'-1}(1-z)^{\gamma-1}\,F(\alpha', \beta', \gamma', yz)\,dz$$

ce qui vaut, comme on voit aisément,

$$\frac{(\gamma'-1)!\,(\gamma-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!}\,F(\alpha', \beta', \gamma+\gamma', y)\,.$$

Mais c'est aussi la valeur du second membre; car, dans la même hypothèse $x = 0$, la forme (4) nous le montre identique à l'expression

$$\mathrm{C}F(\alpha', \beta', \gamma+\gamma', y)\int_0^1 z^{a+b-1}(1-z)^{\alpha-1}\,F(a+\alpha-\beta, b, a+b, z)\,dz\,. \tag{6}$$

Mais ici l'intégrale définie vaut

$$\frac{(a+b-1)!\,(\alpha-1)!}{(a+b+\alpha-1)!}\,F(a+\alpha-\beta, b, a+b+\alpha, 1)\,,$$

ou

$$\frac{(a+b-1)!\,(\alpha-1)!}{(a+b+\alpha-1)!}\,\frac{(a+b+\alpha-1)!\,(\beta-1)!}{(a+\alpha-1)!\,(b+\beta-1)!}\,.$$

On n'a qu'à transporter ce résultat dans (6) et à substituer la valeur de C pour faire apparaître l'identité.

La formule (5) à démontrer est donc exacte, si x est nulle, cela quelles que soient les valeurs $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ et y.

Pour aller plus loin, désignons par $\mathrm{D}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; x, y)$ la différence existant entre les deux membres de (5). On reconnaît à l'instant l'exactitude de la relation

$$\frac{d\mathrm{D}}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}\,\mathrm{D}(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; \alpha', \beta', \gamma'; x, y)\,.$$

Par suite, si $x = 0$, non seulement la différence D s'annule mais aussi toutes les dérivées $\frac{d^n\mathrm{D}}{dx^n}$. Et puisque D est analytique en x, on en conclut que D est identiquement nulle.

La relation (5) est donc exacte sous la réserve, qui va de soi, que les intégrales des deux membres soient convergentes l'une et l'autre. Le théorème peut d'ailleurs être aisément modifié de manière à embrasser le cas de divergence; il suffit de remplacer le contour rectiligne d'intégration par un lacet double entourant les points critiques zéro et l'unité.

La proposition (1) apparaît alors comme un simple cas particulier de (5), celui où les deux paramètres a et b sont nuls : c'est d'ailleurs le fait que la formule (1) se généralise dans l'équation (5) qui prête un certain intérêt à cette dernière malgré sa complexité.

II. — Pour donner un exemple concret d'application de la formule (5), prenons le cas $b = 0$, ou

$$\gamma + \gamma' = \beta + \beta' \;;$$

une seule des conditions (2) est ici supposée.

Faisons en outre $y = 1$; le premier membre de l'équation (5) est

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \beta, \gamma, xz) F(\alpha', \beta', \gamma', 1-z) dz \;.$$

Pour qu'il soit convergent, il faut et il suffit que

$$\gamma > 0 \qquad \gamma' > 0 \qquad \gamma + \gamma' - \alpha' - \beta' > 0 \;.$$

Afin d'en obtenir la valeur, à la place du second membre de (5) qui se présente sous une forme illusoire, nous choisissons l'expression (4). Elle donne

$$\mathrm{C}F(\alpha', \beta', \gamma + \gamma', 1) \int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{a-1}(1-xz)^{\alpha'+\beta'-\gamma-\gamma'} dz \;,$$

et enfin, après quelques réductions faciles,

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \beta, \gamma, xz) F(\alpha', \beta', \gamma', 1-z) dz$$

$$= \frac{(\gamma-1)!(\gamma'-1)!(\gamma+\gamma'-\alpha'-\beta'-1)!}{(\gamma+\gamma'-\alpha'-1)!(\gamma+\gamma'-\beta'-1)!} F(\gamma+\gamma'-\alpha'-\beta', \alpha, \gamma+\gamma'-\alpha', x) \;.$$

Cette équation suppose, répétons-le, $\gamma + \gamma' = \beta + \beta'$.

III. — La formule (1) présente de nombreux cas de dégénérescence dignes de remarque. Qu'il me soit permis de citer ici, en manière de conclusion, ceux qui concernent la série de Kummer

$$F(\alpha, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Cette série entière possède la propriété

$$e^x F(\alpha, \gamma; -x) = F(\gamma - \alpha, \gamma; x)$$

facile à démontrer; elle se relie d'autre part aux fonctions de Bessel par l'équation

$$\frac{J_{\alpha-\frac{1}{2}}(xi)}{(xi)^{\alpha-\frac{1}{2}}} = AF(\alpha, 2\alpha; -2x)\, e^x$$

où A désigne une constante convenablement choisie.

Ceci posé, nous avons le résultat suivant.

Soient

$$F(\alpha, \gamma; x) \quad \text{et} \quad F(\alpha', \gamma'; x)$$

deux fonctions de Kummer telles que

$$\alpha + \alpha' = \gamma + \gamma' ;$$

on a

$$\int_0^1 z^{\gamma-1} (1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \gamma; xz)\, F(\alpha', \gamma'; y(1-z))\, dz$$

$$= \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!} e^x F(\alpha', \gamma+\gamma'; y-x) ,$$

c'est l'analogue de la formule (1).

A cette équation je joins encore la suivante, qui ne suppose plus réalisée la condition $\alpha + \alpha' = \gamma + \gamma'$; c'est

$$\int_0^1 z^{\gamma-1} (1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \gamma; xz)\, F(\alpha', \gamma'; x(1-z))\, dz$$

$$= \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!} F(\alpha+\alpha', \gamma+\gamma'; x) .$$