

EXTRACTION DE LA RACINE n ième D'UN NOMBRE RÉEL PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

Autor(en): **Béritch, Mladen T.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18031>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

EXTRACTION DE LA RACINE $n^{\text{ième}}$
D'UN NOMBRE RÉEL
PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

PAR

Mladen T. BÉRITCH (Belgrade, Serbie).

Pour extraire la $n^{\text{ième}}$ racine d'un nombre réel, il y a différents procédés par approximations successives. Pour obtenir les valeurs approchées par défaut et par excès, on emploie ou deux fonctions ou une fonction dans laquelle on fait deux substitutions. Dans les deux cas, on est obligé d'exécuter deux opérations.

J'indique dans la présente Note un procédé qui fournit à la fois, par le même calcul, les deux valeurs approchées (l'une par défaut, l'autre par excès). De plus il fournit le moyen de savoir d'avance le nombre de chiffres communs à la racine cherchée et à deux valeurs approchées.

Ce procédé pourra être généralisé et appliqué au calcul des racines réelles d'une équation, ou des solutions d'un système des équations algébriques ou transcendantes, ce qui fera l'objet de Notes ultérieures.

1. — Désignons par α la valeur arithmétique de la racine $\sqrt[n]{A}$ et considérons la fonction

$$\varphi(t) = f \left[1 - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{A}{t^n} \right) - \frac{n-1}{2n^2} \left(1 - \frac{A}{t^n} \right)^2 \right].$$

La fonction $\varphi(t)$ est toujours croissante lorsque t varie de 0 à $+\infty$ (φ' étant le carré). Pour $t=0$ on a $\varphi(0) = -\infty$; quand t croît de $t=0$ jusqu'à la valeur $f = \alpha = \sqrt[n]{\frac{A}{2}}$, la fonction $\varphi(t)$ croît en restant plus petite que t ; pour $t = \alpha$ on a $\varphi(\alpha) = \alpha$; quand t croît de α jusqu'à a , la fonction $\varphi(t)$ croît en restant plus grande que t ; pour $t = a$ on a $\varphi(a) = a$; quand t croît de a jusqu'à $+\infty$, la fonction $\varphi(t)$ croît en restant plus petite que t ; pour

$t = +\infty$ on a $\varphi(\infty) = \infty$. Dans l'intervalle (α, a) cette fonction satisfait à l'inégalité

$$t \leq \varphi(t) \leq a \quad (\text{les égalités ayant lieu pour } t = \alpha \text{ et } t = a), \quad (1)$$

et dans l'intervalle $(a, +\infty)$ la même fonction satisfait à l'inégalité

$$t \geq \varphi(t) \geq a \quad (\text{les égalités ayant lieu pour } t = a). \quad (2)$$

Donc dans l'intervalle $(\alpha + \varepsilon, +\infty)$ l'égalité $t = \varphi(t)$ n'existe que pour $t = a$.

Donnons à t une valeur positive $t = g$, plus petite que a et plus grande que α ; cette valeur t satisfait à l'inégalité

$$\frac{A}{2} < g^n < A, \quad (3)$$

en vertu de (1) ou encore

$$g < \varphi(g) < a \quad (1')$$

de sorte que, g étant une valeur approchée par défaut de $\sqrt[n]{A}$, $\varphi(g)$ en sera aussi une valeur approchée par défaut, mais plus rapprochée de la valeur exacte a que g . En posant $\varphi(g) = g_1$, $\varphi(g_1) = g_2, \dots$, la suite: g, g_1, g_2, \dots fournira donc des valeurs de plus en plus approchées par défaut de $\sqrt[n]{A}$ et convergeant uniformément vers cette limite.

De même donnant à t une valeur positive $t = h$, plus grande que a (qui satisfait à l'inégalité $h^n > A$), en vertu de (2) on aura

$$a < \varphi(h) < h, \quad (2')$$

de sorte que, h étant une valeur approchée par excès de $\sqrt[n]{A}$, $\varphi(h)$ en sera aussi une valeur approchée par excès, mais plus rapprochée de la valeur exacte a que h . En posant $\varphi(h) = h_1$, $\varphi(h_1) = h_2, \dots$, la suite h, h_1, h_2, \dots fournira donc des valeurs de plus en plus approchées par excès de $\sqrt[n]{A}$ et convergeant uniformément vers cette limite.

On a ainsi deux suites de valeurs, obtenues à l'aide d'une valeur arbitraire $t = g$ (qui satisfait à l'inégalité (3)) et d'une valeur $t = h$ ($h^n > A$); elles se rapprochent de plus en plus de la valeur exacte a de la racine et finissent par en différer aussi peu qu'on voudra.

2. — Si l'on remplace g_i (resp. h_i) par une valeur approchée g'_i (resp. h'_i) plus grande que g_i (resp. plus petite que h_i) et plus com-

mode pour le calcul à effectuer, deux cas pourront se présenter :

$$\varphi(g'_i) > g'_i \quad (\text{resp. } \varphi(h'_i) < h'_i) \quad (a)$$

les deux valeurs approchées g_i et g'_i (resp. h_i et h'_i) sont toutes les deux par défaut (resp. par excès),

$$\varphi(g'_i) < g_i \quad (\text{resp. } \varphi(h'_i) > h'_i) \quad (b)$$

la valeur g'_i (resp. h'_i) n'est plus la valeur approchée par défaut (resp. par excès) mais la valeur approchée par excès (resp. par défaut) puisqu'elle satisfait à l'inégalité (2) (resp. (1)) et non à l'inégalité (2)). Donc il faudra écrire $g'_i = h$ (resp. $h'_i = g$).

Dans la pratique on pourra procéder de la manière suivante :

Donnons à t une valeur arbitraire h plus grande que $\sqrt[n]{A}$ (c'est-à-dire telle que $h^n > A$); on calcule $\varphi(h)$, on pose $\varphi(h) = h_1$, on choisit un nombre h'_i plus petit que h_1 et plus commode pour le calcul de $\varphi(h)$; on trouve $\varphi(h'_i)$ plus grand ou plus petit que h'_i . Dans le deuxième cas h'_i est la valeur approchée par excès, dans le premier cas, h'_i est la valeur approchée par défaut, donc h'_i est une valeur désignée par g .

Si l'on a $\varphi(h'_i) < h'_i$ on pose $\varphi(h'_i) = h_2$ et on continue de la même manière.

Si l'on a $\varphi(h'_i) > h'_i$ on posera $h'_i = g$, $\varphi(g) = g_1$, on choisit une valeur g'_i plus grande que g_1 et plus commode pour le calcul; on calcule $\varphi(g'_i)$ qui peut être plus grand ou plus petit que g'_i , qui est d'après cela une valeur approchée par défaut ou par excès.

On continue en choisissant toujours : une valeur plus grande, si la valeur trouvée était la valeur approchée par défaut; ou une valeur plus petite, si la valeur trouvée était la valeur approchée par excès. De cette manière on se rapprochera de la racine a des deux côtés, la valeur exacte de la racine restant toujours comprise entre la plus grande des valeurs de g_i et la plus petite des valeurs de h_i . En poussant suffisamment les calculs, on resserre cet intervalle autant qu'on veut.

3. — En supprimant le troisième terme du crochet, la fonction $\varphi(t)$ devient la fonction

$$\psi(t) = t \left[1 - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{A}{t^n} \right) \right].$$

Cette fonction $\psi(t)$ est infinie pour $t = 0$; quand t croît de $t = 0$ jusqu'à $t = a$, $\psi(t)$ décroît; pour $t = a$, on a $\psi(a) = a$; quand t

croît de $t = a$ jusqu'à $+\infty$, $\psi(t)$ croît; pour $t = +\infty$ ou $\psi(\infty) = +\infty$. La fonction $\psi(t)$ satisfait à l'inégalité

$$\psi(t) \geq t \quad (\text{si } t > 0)$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $t = a$.

Si $t = g$, c'est-à-dire si t est une valeur approchée par défaut de a , $\varphi(g)$ l'est aussi, tandis que $\psi(g)$ est une valeur approchée par excès. On aura l'inégalité

$$g < \varphi(g) < a < \psi(g),$$

donc la racine cherchée a sera comprise entre deux valeurs $\varphi(g)$ et $\psi(g)$.

En connaissant le premier chiffre décimal (ou les deux chiffres) différent de zéro, de l'expression $1 - \frac{A}{t^n}$, on connaîtra approximativement la valeur du terme supprimé

$$\frac{n-1}{2n^2} \left(1 - \frac{A}{t^n}\right)^2. \quad (4)$$

Le nombre des zéros qui suivent la partie entière de la valeur numérique de ce terme est le nombre de chiffres communs à deux valeurs approchées, appartenant en même temps à la valeur exacte de la racine cherchée.

En effet les deux fonctions qui donnent les deux valeurs approchées l'une par défaut (la fonction φ) et l'autre par excès (la fonction ψ) ne diffèrent que par le produit de (4) et de t ; les deux crochets ne diffèrent que par le terme (4). Donc les deux crochets auront les mêmes chiffres quand le terme (4) contient des zéros qui suivent la partie entière de la valeur numérique de ce terme.

La valeur exacte a aura des chiffres qui sont communs aux deux fonctions f et φ ; donc on connaîtra le nombre de chiffres exacts qu'on peut obtenir de l'opération envisagée.

Les valeurs approchées peuvent être calculées avec autant de chiffres qu'on veut, mais il suffit de calculer un ou deux chiffres qui suivent les chiffres communs.

Premier exemple. Calculer $\sqrt{1000}$; on a ici $n = 2$, $A = 1000$.

Posons $t = 32 = h$ ($32^2 > 1000$), on trouve $\varphi(h) = 31,625 = h_1$; choisissons un nombre plus petit que h_1 , plus commode pour le calcul $h'_1 = 31,62 = g$ ($31,62^2 < 1000$). Le terme (4) est ici $\frac{1}{8} 0,00017^2 = 0,000000004$, la valeur exacte a aura huit chiffres communs aux deux valeurs approchées, on calculera ces valeurs

approchées avec neuf ou dix chiffres, on aura

$$\varphi(g) = 31,62277657 = g_1, \quad \psi(g) = 31,62277670.$$

Choisissons un nombre plus grand que $g_1 = \varphi(g)$ et plus petit que $\psi(g)$ avec lequel il est plus commode à calculer φ , c'est $g'_1 = 31,6227766$ ($g'_1 < 1000$); le terme (4) a ici la valeur à peu près $\frac{1}{20} 21$, la valeur exacte a aura 20 ou 21 chiffres exacts, communs aux deux valeurs approchées φ et ψ , que nous calculerons avec 21 ou 22 chiffres; on trouve ainsi (en calculant 22 chiffres)

$$\varphi(g'_1) = 31,622\ 776\ 601\ 683\ 793\ 3\ 1998$$

$$\psi(g'_1) = 31,622\ 776\ 601\ 683\ 793\ 3\ 2001$$

(on n'a ici que 18 chiffres de la valeur exacte, les deux valeurs diffèrent en quatre chiffres, mais la vraie différence n'est que 0,0003 du dernier chiffre commun).

Deuxième exemple. Calculer $\sqrt[5]{1000}$; on a ici $n = 5$, $A = 1000$. Posons $t = 4 = h$ ($4^5 > 1000$); le terme (4) est 0,00004 et il faut calculer avec cinq ou six décimales; on trouve $\varphi(t) = 3,98108 = h_1$. Choisissons maintenant h'_1 plus petit et plus commode pour le calcul, par exemple $h'_1 = 3,98$. Posons $t = h'_1 = 3,98 = g$, ($g^5 < 1000$) la valeur du terme (4) étant 0,000 000 15, calculons avec huit chiffres, nous trouvons

$$\varphi(t) = 3,9810717 = g_1, \quad \psi(t) = 3,9810723.$$

Nous avons trouvé six chiffres de la valeur exacte $a = 3,98107...$ (On pourrait prendre aussi $g'_1 = 3,981072$, etc.)