

PENSÉE AXIOMATIQUE

Autor(en): **Hilbert, David**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18027>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

De même les droites p'_1, p'_2, p'_3 rencontrent les côtés du premier triangle en neuf points

$$P'_{11}, P'_{12}, P'_{13}; \quad P'_{21}, P'_{22}, P'_{23}; \quad P'_{31}, P'_{32}, P'_{33}.$$

Il y a pour tout couple de triangles sphériques ou plans en général trois points P tels que sont collinéaires les points de chacun des six systèmes :

$$\begin{array}{lll} P_{11}, P_{22}, P_{33}; & P_{12}, P_{23}, P_{31}; & P_{13}, P_{21}, P_{32} \\ P'_{11}, P'_{22}, P'_{33}; & P'_{12}, P'_{23}, P'_{31}; & P'_{13}, P'_{21}, P'_{32}. \end{array}$$

Nous revenons sur la démonstration de ces deux théorèmes dans un article ultérieur.

PENSÉE AXIOMATIQUE¹

PAR

David HILBERT (Göttingue).

Dans la vie des sociétés la prospérité des peuples dépend de celle de tous ses voisins ; les Etats, de même, ont un intérêt vital à ce que l'ordre non seulement règne à l'intérieur de chacun d'eux, mais existe aussi dans leurs relations mutuelles. Il n'en va pas autrement dans la vie des sciences. Preuve en soit le vif intérêt que les représentants les plus remarquables de la pensée mathématique ont toujours témoigné à la structure et aux lois des autres sciences que la leur ; ils n'ont cessé avant tout d'étudier les mathématiques (et pour le plus grand bien de ces dernières) dans leurs rapports avec les vastes

¹ *Axiomatisches Denken*, conférence faite à la reunion annuelle de la Société mathématique suisse, tenue à Zurich, le 11 septembre 1917. — Traduction de M. Arnold REYMOND, professeur à l'Université de Neuchâtel.

domaines de la physique et de la théorie de la connaissance qui les côtoient de plus près. La nature de ces relations et leur foncière fécondité seront, je crois, nettement indiquées si je désigne sous le nom de *méthode axiomatique* la méthode générale d'investigation qui les caractérise et qui dans les mathématiques modernes prend une importance de plus en plus grande.

Si nous groupons les faits d'un domaine scientifique déterminé, plus ou moins étendu, nous remarquons bientôt qu'ils sont susceptibles d'être ordonnés. Cet ordre s'effectue constamment par le moyen d'un certain *édifice de concepts* tel qu'un concept et un seul corresponde à tout objet du domaine scientifique et qu'à l'intérieur de ce dernier un état de faits ait pour équivalent une relation logique entre concepts. L'édifice des concepts n'est pas autre chose que la *théorie* du domaine scientifique envisagé.

C'est ainsi que les faits géométriques s'ordonnent en une géométrie, les faits arithmétiques en une théorie des nombres, les faits statiques, mécaniques, électrodynamiques en théories de la statique, de la mécanique, de l'électrodynamique, ou c'est encore ainsi que les faits de la physique des gaz se groupent en une théorie des gaz. Il en est de même en ce qui concerne les domaines scientifiques de la thermodynamique, de l'optique géométrique, de la théorie du rayonnement, de la conduction de la chaleur ou encore du calcul des probabilités et de la théorie des ensembles. La même remarque s'impose enfin, qu'il s'agisse de mathématiques pures (théorie des surfaces, théorie de Galois concernant les équations, théorie des nombres premiers) ou de sciences sans rapport direct avec les mathématiques pures telles que la théorie de la monnaie ou certains chapitres de la psychophysique.

Si maintenant nous considérons de plus près une théorie déterminée, nous constatons invariablement que l'édifice des concepts doit avoir pour base dans le domaine scientifique un nombre restreint de propositions exceptionnelles qui suffisent à elles seules à construire tout l'édifice d'après des principes logiques.

En géométrie, par exemple, il suffit d'en appeler uniquement à la proposition qui concerne la linéarité de l'équation du plan et la transformation orthogonale des coordonnées ponctuelles pour construire ensuite, et par le seul moyen de l'analyse, la science cependant si vaste de la géométrie euclidienne dans l'espace. De même la théorie des nombres s'édifie entièrement d'après les règles et les lois de calcul qui sont valables pour les nombres entiers. C'est encore un rôle analogue que jouent en statique, le principe du parallélogramme des forces, en mécanique les équations différentielles de Lagrange sur le mouvement et en électrodynamique les équations de Maxwell, à condition toutefois d'adjoindre à ces dernières un postulat relatif à la rigidité et à la charge de l'électron. Semblablement la thermodynamique se laisse en entier construire sur le concept de la fonction énergétique et sur les définitions de température et de pression qui en sont tirées au moyen des variables (entropie et volume). Nous trouvons de même au centre de la théorie du rayonnement la loi de Kirchhoff qui règle les rapports entre l'émission et l'absorption, dans le calcul des probabilités la loi des erreurs de Gauss, dans la théorie des gaz le principe de l'entropie conçu comme le logarithme négatif de la probabilité d'un état donné, dans la théorie des surfaces la représentation d'un élément curviligne par une forme quadratique différentielle, dans la théorie des équations le théorème concernant l'existence des racines, dans la théorie des nombres premiers le principe relatif à la réalité et à la fréquence des zéros dans la fonction riemanienne $\zeta(t)$.

Tous ces principes fondamentaux peuvent, à un premier point de vue, être envisagés comme les *axiomes de domaines scientifiques spéciaux* dont l'extension progressive s'achève ensuite d'une façon purement logique à l'intérieur de l'édifice conceptuel déjà exécuté. C'est surtout dans les mathématiques pures que ce point de vue s'affirme avec netteté, et c'est aux travaux qui s'en sont inspirés que nous devons le développement prodigieux de la géométrie, de l'arithmétique, de la théorie des fonctions et de toute l'analyse.

Cela étant, et pour les cas dont nous avons parlé, le pro-

blème relatif aux fondements d'un domaine scientifique spécial semblait avoir trouvé une solution ; mais celle-ci ne pouvait être que provisoire. En fait et dans chaque domaine le besoin se faisait sentir de fonder jusqu'aux propositions spécifiées plus haut, bien qu'elles fussent considérées comme des axiomes fondamentaux. C'est ainsi que l'on s'efforça de prouver soit la linéarité de l'équation du plan et l'orthogonalité de la transformation qui exprime un mouvement, soit les lois du calcul arithmétique, soit le parallélogramme des forces ou encore les équations du mouvement de Lagrange et la loi de Kirchhoff sur l'émission et l'absorption, soit enfin le principe de l'entropie et la proposition relative à l'existence des racines d'une équation.

Mais l'examen critique de ces « preuves » fit reconnaître qu'en soi elles n'en sont pas ; en réalité elles ne font que rendre possible le retour à certaines propositions plus fondamentales encore qui elles-mêmes apparaissent comme de nouveaux axiomes en lieu et place des lois à démontrer. C'est de cette façon qu'ont pris naissance les *axiomes* ainsi dénommés à juste titre aujourd'hui, de la géométrie, de l'arithmétique, de la statistique, de la mécanique, de la théorie du rayonnement ou de la thermodynamique. Ces axiomes forment une couche sous-jacente plus profonde en opposition à la couche axiomatique superficielle, caractérisée par les principes fondamentaux posés en premier lieu et que nous avons énoncés pour chaque domaine scientifique spécial. Le procédé de la méthode axiomatique, tel que nous venons de le décrire, revient donc à poser plus profondément les fondations qui soutiennent chacun des domaines scientifiques spéciaux, travail analogue à celui qui est nécessaire pour rehausser un bâtiment sans en compromettre la sécurité.

Pour qu'une théorie scientifique représentée par un édifice de concepts remplisse son but, deux exigences sont avant tout requises ; la première concerne la *dépendance* et respectivement *l'indépendance* des propositions de cette théorie, la deuxième *l'absence de contradiction* dont ces propositions prises dans leur ensemble doivent témoigner.

Occupons-nous tout d'abord de la dépendance et de l'indépendance des axiomes.

L'exemple classique dont on se sert pour prouver l'indépendance d'un axiome est fourni en géométrie par le *postulat des parallèles* qu'Euclide, remarquons-le, rangeait déjà parmi les axiomes. Par là, il écartait la question de savoir si cette proposition n'était pas elle-même conditionnée par les autres axiomes. Aussi, la méthode de recherche préconisée par Euclide est-elle restée typique de toute recherche axiomatique, et depuis ce grand savant la géométrie est-elle devenue l'exemple modèle de la science axiomatique.

La mécanique classique nous offre un autre exemple d'investigation concernant l'indépendance des axiomes. Comme nous l'avons fait remarquer, les équations de Lagrange sur le mouvement pouvaient être envisagées provisoirement comme les axiomes de la mécanique, car elles suffisent complètement à fonder les formules générales relatives à des forces quelconques et aux conditions quelconques qui les accompagnent. Mais une recherche plus approfondie montre qu'il est inutile pour l'édification de la mécanique, de postuler à la fois des forces et des conditions quelconques, et que par là le système des postulats peut être diminué. Cette constatation conduit d'un côté au système d'axiomes posés par Boltzmann, qui ne suppose que des forces, spécialement centrales il est vrai, mais qui n'exige aucune condition additionnelle, de l'autre au système d'axiomes défini par Hertz, lequel rejette les forces pour faire appel à des conditions, plus spécialement à des liaisons rigides. Ces deux systèmes d'axiomes constituent ainsi une couche plus profonde dans l'axiomatisation progressive de la mécanique.

Si nous considérons maintenant dans la théorie de Galois relative aux équations l'existence des racines d'une équation comme un axiome fondamental, celui-ci n'en reste pas moins un axiome dépendant; car il peut, en tant que proposition existentielle, être dérivé des axiomes de l'arithmétique, comme Gauss l'a montré le premier.

Il en va de même si dans la théorie des nombres premiers nous considérons comme axiomatique la proposition concer-

nant la réalité des zéros de la fonction riemanienne $\zeta(t)$: pour creuser plus à fond la couche des axiomes purement arithmétiques la preuve de cette affirmation de réalité serait nécessaire, car c'est cette preuve qui seule garantirait la certitude des importantes conséquences que nous avons pu, en la postulant, établir pour la théorie des nombres premiers.

Il faut signaler comme étant d'un intérêt tout particulier pour un processus axiomatique la question relative à l'indépendance des principes d'un domaine scientifique par rapport à l'axiome de *continuité*.

Dans la théorie des nombres réels, on montre par exemple que l'axiome dit d'Archimède sur la mesure est indépendant de tous les autres axiomes arithmétiques. Cette constatation est, comme on le sait, d'une importance capitale pour la géométrie ; mais elle me paraît avoir aussi pour la physique un intérêt majeur, car elle nous conduit au résultat suivant : d'une part nous pouvons, en juxtaposant des longueurs terrestres, calculer les dimensions et les distances des corps dans l'espace, c'est-à-dire mesurer les grandeurs célestes par une mesure terrestre ; d'autre part les mesures métriques permettent d'exprimer les distances jusque dans l'intérieur des atomes. Ces faits toutefois ne sont en aucune façon une conséquence logique des principes concernant la congruence des triangles et la configuration géométrique, mais uniquement le résultat d'une recherche empirique. Dans le monde physique, la validité de l'axiome archimédien a donc besoin selon le sens indiqué d'une confirmation expérimentale directe à peu près comme la proposition relative à la somme des angles d'un triangle au sens connu.

D'une façon générale je pourrais formuler comme suit l'axiome de continuité en physique : « Lorsqu'un degré quelconque de précision est assigné d'avance à la validité d'une formule physique, il existe de petits domaines à l'intérieur desquels les hypothèses faites pour la formule peuvent varier librement sans que l'écart d'avec cette dernière dépasse le degré de précision prescrit. » Cet axiome ne fait au fond qu'exprimer ce qu'il y a d'immédiat dans la nature de l'expérience ; il est toujours implicitement supposé par les physi-

ciens, sans avoir été jusqu'à maintenant formulé d'une façon particulière.

Si, par exemple, de l'axiome concernant l'impossibilité d'un « *perpetuum mobile* » de deuxième espèce on fait avec Planck dériver le second principe de la Thermodynamique on utilise nécessairement cet axiome de continuité.

Ce dernier est également indispensable pour fonder la statique en utilisant l'axiome du parallélogramme des forces, ou du moins en choisissant certains autres axiomes qui s'en rapprochent beaucoup. C'est ce que Hamel a montré d'une manière très intéressante par l'emploi du principe relatif à la possibilité pour le continuum d'être bien ordonné.

On peut de même déplacer en profondeur les axiomes de la mécanique classique, si en vertu de l'axiome de continuité, on se représente le mouvement continu comme décomposé par le moyen d'impulsions en des mouvements rectilignes et uniformes qui se suivent un à un avec rapidité ; il faut alors utiliser comme un axiome mécanique essentiel le *principe du travail maximum de Bertrand* conformément auquel après chaque choc le mouvement qui en réalité se produit est toujours celui pour lequel l'énergie cinétique du système est un maximum en face de tous les mouvements compatibles avec le principe de la conservation de l'énergie.

Quant aux plus récentes tentatives de fonder la physique et spécialement l'électrodynamique, elles reposent complètement sur des théories du continuum et par suite elles impliquent dans la plus large mesure l'idée de continuité ; je ne les examinerai cependant pas ici, parce que ces recherches n'ont pas atteint un degré de perfection suffisant.

Passons maintenant à l'examen du deuxième problème dont nous avons parlé plus haut, à savoir la question concernant *l'absence de contradiction des axiomes*. Cette question est de la plus haute importance, car la présence d'une contradiction dans une théorie en compromettrait toute la stabilité.

Or il peut arriver que la notion de non-contradiction interne ne se concilie que difficilement avec des théories depuis longtemps acceptées et qui ont fait leurs preuves. Je

rappelle, par exemple, dans la théorie cinétique des gaz les difficultés relatives à la réversibilité périodique.

Souvent aussi il arrive que la non-contradiction interne d'une théorie est considérée comme allant de soi, alors qu'en réalité de profonds développements mathématiques seraient nécessaires pour la prouver. Pour illustrer ce fait, considérons le problème suivant tiré de la théorie de la conduction de la chaleur : distribution de la température à l'intérieur d'un corps homogène dont la surface est maintenue à une température déterminée qui varie suivant les régions. Cela étant, le postulat relatif au maintien de l'équilibre de température ne renferme en fait aucune contradiction interne. Mais en théorie il est nécessaire de prouver que le problème bien connu concernant les valeurs-limites de la fonction potentielle est toujours résoluble, car seule la solution de ce problème montre qu'une distribution de la température satisfaisant à l'équation de la conduction calorifique est en principe possible.

Mais en physique surtout il ne suffit pas de prouver que les principes d'une théorie s'accordent entre eux ; il faut encore montrer que ceux-ci ne contredisent pas les principes d'un domaine scientifique voisin.

Par exemple et comme je l'ai récemment fait voir, l'axiome de la théorie du rayonnement comporte, outre la loi fondamentale de Kirchhoff sur l'émission et l'absorption, une proposition spéciale sur la réflexion et la réfraction de rayons lumineux isolés que l'on peut énoncer en ces termes : soit deux rayons de lumière naturelle et de même énergie ; ils tombent chacun d'un côté sur une surface qui sépare deux milieux et cela suivant des directions telles que, le premier après son passage, le second après sa réflexion suivent la même direction. Dans ces circonstances, le rayon qui naît de leur union est de nouveau un rayon de lumière naturelle et de même énergie. Cette proposition, comme on le constate en fait, n'est en aucune manière en contradiction avec l'optique ; mais en sus elle peut être dérivée comme une conséquence de la théorie électromagnétique de la lumière.

Comme on le sait les résultats de la *théorie cinétique des gaz* sont en accord parfait avec la *thermodynamique*.

De la même façon *l'inertie électromagnétique* et la *gravitation d'Einstein* sont compatibles avec les concepts correspondants de la théorie classique en tant que ceux-ci sont envisagés comme les cas-limites des concepts plus généraux qui sont à la base des nouvelles théories.

Au contraire la *théorie moderne des quanta* et la connaissance progressive de la structure interne des atomes ont conduit à des lois qui contredisent directement l'électrodynamique édiflée jusqu'à présent sur les équations de Maxwell. C'est pourquoi à l'heure actuelle l'électrodynamique, ainsi que chacun le reconnaît, a impérieusement besoin d'une nouvelle base et d'une radicale transformation.

Comme on le voit par tout ce qui précède, la réfutation des contradictions qui surgissent doit toujours s'effectuer par un changement dans le choix des axiomes ; la difficulté consiste alors à découvrir un choix tel que toutes les lois physiques constatées découlent logiquement des axiomes choisis.

Il en va autrement lorsque les contradictions se dressent dans les sciences théoriques pures. Comme exemple classique d'un pareil événement on peut citer la théorie des ensembles et le *paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles* dont l'origine remonte déjà à Cantor. Ce paradoxe est si pesant que des mathématiciens hors ligne comme Kronecker et Poincaré ont, à cause de lui, refusé le droit d'existence à toute la théorie des ensembles, qui est cependant l'un des rameaux les plus riches et les plus vigoureux des mathématiques.

La méthode axiomatique vint heureusement remédier à cet état de choses précaire. Par la mise au jour d'axiomes appropriés Zermelo, d'un côté, restreignit l'arbitraire des définitions concernant les ensembles, et de l'autre, limita avec précision les énoncés admissibles en les reportant sur les éléments des ensembles. De cette manière il réussit à développer la théorie des ensembles de façon à en faire tomber les contradictions verbales tout en lui laissant, malgré les restrictions imposées, la même étendue et la même capacité d'application.

Dans tous les cas envisagés jusqu'ici, il s'est agi de contradictions qui avaient surgi au cours du développement d'une théorie et dont la disparition nécessitait la refonte d'un système d'axiomes. Mais il ne suffit pas d'éviter les contradictions qui peuvent se présenter, si l'on veut rendre aux mathématiques par elles compromises leur réputation d'être le modèle de la science la plus rigoureuse. Par son essence même la méthode axiomatique a des exigences beaucoup plus étendues; elle doit en particulier prouver que, dans chaque cas et sur la base du système d'axiomes posés, les contradictions sont *absolument impossibles* à l'intérieur d'un domaine scientifique.

Conformément à cette exigence, j'ai démontré dans les *Fondements de la géométrie* la non-contradiction des axiomes posés en faisant voir que toute contradiction qui découlait logiquement d'axiomes géométriques devait nécessairement se manifester aussi dans l'arithmétique du système des nombres réels.

Pour les théories physiques elles-mêmes, il suffit non moins évidemment de ramener le problème de la *non-contradiction interne* à la non-contradiction des axiomes arithmétiques. C'est ainsi que j'ai montré la non-contradiction des axiomes indispensables à la *théorie du rayonnement* en construisant pour elle un système d'axiomes composés d'éléments analytiques indépendants, ce qui suppose la non-contradiction de l'Analyse.

L'on peut et l'on doit, cas échéant, procéder d'une façon semblable dans l'édification d'une théorie mathématique. Considérons par exemple comme des axiomes la proposition qui dans le développement de la théorie des groupes de Galois est relative à l'*existence des racines* et le principe qui dans la théorie des nombres premiers définit la *réalité des zéros* de la fonction riemannienne $\zeta(t)$; il faut alors dans chacun de ces cas prouver la non-contradiction du système d'axiomes envisagé, et pour cela démontrer par le moyen de l'Analyse la proposition concernant l'existence des racines, comme aussi le principe riemannien relatif à la fonction $\zeta(t)$, car c'est seulement de cette manière que l'achèvement de la théorie est assuré.

De même le problème de la non-contradiction d'un système d'axiomes pour les *nombres réels* se laisse ramener à un problème qui regarde les nombres entiers. C'est le mérite de Weierstrass et de Dédekind de l'avoir montré par leur théorie des nombres irrationnels.

L'axiome des *nombres entiers* et les bases de la *théorie des ensembles* constituent toutefois des cas uniques d'exception. Le chemin qui conduirait à un domaine scientifique plus spécial encore que le leur paraît inaccessible, car en dehors de la logique il n'existe plus aucune discipline à laquelle un dernier recours serait encore possible.

Cependant comme le devoir d'établir la non-contradiction est inéluctable il est nécessaire, semble-t-il, d'axiomatiser la logique elle-même et de prouver que la théorie des nombres comme celle des ensembles ne sont que des parties de la logique.

Cette voie a été depuis longtemps préparée, surtout par les profondes recherches de Frege; mais elle a été finalement ouverte avec succès par Russell, aussi profond logicien que mathématicien pénétrant. Dans l'achèvement de la tâche grandiose que ce dernier a entreprise pour *axiomatiser la logique* on pourrait à bon droit voir le couronnement de l'œuvre même d'axiomatisation.

Cet achèvement toutefois nécessite encore un travail nouveau et multiple. Une réflexion plus approfondie montre en effet bien vite que le problème de la non-contradiction dans les ensembles et les nombres entiers ne se suffit pas à lui-même, mais qu'il se rattache à un vaste domaine de questions très difficiles qui relèvent de la théorie de la connaissance tout en ayant une couleur nettement mathématique. Pour caractériser brièvement cet ensemble de questions, je me bornerai à une simple énumération. *Un problème mathématique comporte-t-il toujours une solution?* Question capitale à laquelle se rattache subsidiairement la suivante : le résultat d'une recherche mathématique est-il toujours *contrôlable*? Dans le même ordre d'idées, qu'entend par le *critérium de simplicité* relatif aux preuves mathématiques? Comment définir dans les mathématiques et la logique le

rapport entre le *contenu et la forme* ? En quoi consiste enfin la *détermination* d'un problème mathématique par un nombre fini d'opérations ?

L'axiomatisation de la logique ne pourra nous satisfaire entièrement que le jour où toutes les questions de cette nature seront résolues et éclairées dans leur rapport.

La dernière surtout concernant la détermination par un nombre fini d'opérations est la plus connue et la plus fréquemment discutée, parce qu'elle regarde au plus haut point l'essence de la pensée mathématique.

Je voudrais augmenter l'intérêt qu'on lui porte en m'attachant à quelques problèmes mathématiques spéciaux dans lesquels elle joue certainement un rôle.

Comme on le sait, la théorie des *invariants algébriques* renferme un théorème fondamental d'après lequel il existe toujours un nombre fini d'invariants tout à fait rationnels, grâce auxquels tous les autres invariants semblables peuvent être représentés d'une façon complètement rationnelle. La première preuve générale de ce fait a été donnée par moi ; elle satisfait pleinement, je crois, notre besoin de simplicité et de clarté ; il est impossible toutefois de la transformer de façon à pouvoir, par son moyen, assigner des limites au nombre cependant fini des invariants qui composent tout le système ou d'établir réellement ces derniers. Des réflexions tout autrement conduites et des principes nouveaux ont été nécessaires pour constater que la détermination du système total des invariants exige uniquement des opérations dont le nombre est fini et se trouve renfermé dans des limites qui peuvent être assignées à l'avance.

La *théorie des surfaces* nous offre un autre exemple de ce fait. En effet la géométrie des surfaces du quatrième ordre soulève une question fondamentale, à savoir : de combien de nappes, séparées les unes des autres, une surface de cette espèce peut-elle tout au plus se composer ?

Pour répondre à cette question la première tâche qui s'impose est de prouver que le nombre de ces nappes doit être fini. Il semble facile d'en donner la preuve en s'engageant comme suit dans la théorie des fonctions. On suppose l'exis-

tence de nappes infiniment nombreuses et l'on choisit un point et un seul à l'intérieur de chaque portion d'espace limitée par une nappe. Mais le lieu où se condensent ces points qui par leur choix sont infiniment nombreux serait un point d'une singularité telle qu'il faut l'exclure pour une surface algébrique.

La voie indiquée par la théorie des fonctions ne nous permet donc en aucune façon d'assigner au nombre des nappes de la surface une limite supérieure. C'est pourquoi il vaut mieux avoir recours à des considérations basées sur le nombre des points d'intersection; ces derniers nous enseignent finalement que le nombre des régions recherchées ne peut être supérieur à 12.

Bien que cette deuxième méthode soit si différente de la première, nous ne pouvons cependant ni la réduire ni la transformer au point de décider s'il existe réellement une surface du 4^{me} ordre à 12 nappes.

Mais puisqu'une forme quaternaire du 4^{me} ordre possède 35 coefficients homogènes, nous pouvons nous représenter intuitivement une surface déterminée du 4^{me} ordre par un point situé dans un espace à 34 dimensions. Le discriminant de la forme quaternaire du 4^{me} ordre est, dans les coefficients qu'elle possède, du degré 108; égalé à zéro il représente dans l'espace à 34 dimensions une surface du 108^{me} ordre. Comme d'autre part les coefficients du discriminant lui-même sont des nombres entiers déterminés, le caractère topologique de la surface discriminantielle se laisse fixer avec précision d'après les lois qui nous sont familières dans l'espace à deux ou trois dimensions. De cette façon nous pouvons être renseignés exactement sur la nature et la signification des territoires particuliers que la surface discriminantielle découpe dans l'espace à 34 dimensions. Représentées alors par les points de chaque territoire ainsi défini, les surfaces du 4^{me} ordre possèdent toutes sûrement le même nombre de nappes. Cela étant, il est possible par un dénombrement fini, bien que très fatigant et de longue haleine, de confirmer si une surface du 4^{me} ordre existe ou non avec des nappes en nombre $n \leq 12$.

Les considérations géométriques que nous venons de développer constituent la troisième voie à suivre pour répondre à la question posée. Elles permettent de le faire par un nombre fini d'opérations. En principe donc, notre problème est largement épuisé : il se trouve ramené à un problème d'un ordre à peu près analogue à la tâche de découvrir le chiffre de rang 10^{10} que l'on obtient en développant π sous forme de fraction décimale. Ce problème peut être manifestement résolu bien que la solution en reste inconnue.

En fin de compte il vaut mieux utiliser les recherches profondes et difficiles que Rohn a faites au moyen de l'algèbre et de la géométrie. Ces recherches en effet¹ nous font voir qu'une surface du 4^me ordre ne peut pas comporter 11 nappes : en réalité il n'en peut exister que 10. Cette quatrième méthode est donc la seule qui apporte la solution complète du problème posé.

Ces développements spéciaux indiquent comment diverses méthodes de démonstration sont applicables au même problème ; ils permettent d'étudier de plus près, comme il le faut, la nature en soi de la preuve mathématique, si l'on veut éclaircir avec succès des questions analogues à celle de la détermination d'un problème par un nombre très grand, mais fini, d'opérations.

Tous les problèmes essentiels que je viens de caractériser, et parmi lesquels celui relatif au nombre des opérations n'est que le dernier traité et mentionné, me paraissent un champ important dont la découverte est toute récente. Pour conquérir ce champ nous devons, c'est là ma conviction, considérer comme l'objet d'une recherche à part le concept de la démonstration spécifiquement mathématique, exactement comme l'astronome doit prendre en considération le mouvement de la station où il se trouve et le physicien la théorie de ses appareils, ou encore exactement comme le philosophe est tenu de critiquer la raison elle-même.

La réalisation de ce programme constitue une tâche qui pour le moment est certes loin d'être achevée.

¹ Un exposé sommaire en a été fait par F. Klein dans ses « Conférences sur les mathématiques » Paris, Hermann, p. 29. (Note du traducteur.)

Pour conclure je voudrais en quelques mots résumer ma conception générale sur la nature de la méthode axiomatique.

Selon moi tout ce qui peut être objet de pensée scientifique est acquis, sitôt que la forme en est mûre pour une théorie, à la méthode axiomatique et par là indirectement aux mathématiques. Plus nous pénétrons dans les couches toujours plus profondes des axiomes au sens indiqué précédemment, plus nous acquérons sur la nature de la pensée scientifique des vues toujours plus profondes; plus aussi nous devenons conscients de l'unité de notre savoir. Dans l'édifice des sciences enfin, dessiné par la méthode axiomatique, les mathématiques paraissent appeler à jouer un rôle directeur.

CHRONIQUE

Albert Gauthier-Villars.

C'est avec un profond regret que nous avons appris la mort de M. Albert Gauthier-Villars, l'un des éditeurs de *L'Enseignement mathématique*. Ancien élève de l'École polytechnique (promotion 1881), Albert Gauthier-Villars avait renoncé à la carrière militaire pour continuer, suivant les traditions familiales, la direction de la célèbre maison d'éditions scientifiques. Engagé volontaire depuis le début de la guerre, il a succombé à son poste, en qualité de capitaine d'artillerie lourde, le 14 juillet, à l'âge de 57 ans.

En annonçant à l'Académie des sciences la mort du savant et sympathique éditeur des *Comptes rendus*, M. Emile Picard, Secrétaire perpétuel, a rappelé la haute compétence et la grande aménité de ce savant qui ne comptait que des amis dans le monde scientifique français et qui emporte les regrets de tous ceux qui l'ont connu.

La mort prématurée d'Albert Gauthier-Villars laissera un grand vide dans la maison d'éditions qu'il dirigeait avec tant de distinction. Que tous ses collaborateurs reçoivent l'assurance de notre vive sympathie.