Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ORIGINES D'UN PROBLÈME INÉDIT DE E. TORRICELLI
Autor: Turrière, Emile
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18035

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LES ORIGINES D'UN PROBLÈME INÉDIT DE E. TORRICELLI

PAR

Émile TURRIÈRE (Montpellier).

---

1. — M. Gino LORIA vient tout récemment d'appeler l'attention des lecteurs de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*[1] sur un problème d'analyse diophantine, dont l'énoncé, dû à Evangelista TORRICELLI, est resté inédit. La question soulevée par l'éminent professeur de la R. Université de Gênes est du plus grand intérêt, surtout sous le point de vue de l'histoire de la théorie des nombres au XVIIe siècle : elle est intimement liée, en effet, à un difficile problème de FERMAT, auquel sont en outre attachés les noms de BILLY, de LEIBNIZ (?), de LAGRANGE et d'EULER.

Le problème d'Evangelista Torricelli et le problème de Fermat.

2. — C'est dans les termes qui suivent que M. Gino LORIA a posé la question et fait connaître l'énoncé du problème inédit de E. TORRICELLI :

« Dans un groupe de problèmes énoncés par E. TORRICELLI « et qui verront le jour dans l'édition actuellement sous « presse des *Œuvres complètes* de ce savant, je trouve le « suivant :

Trouver un triangle rectangle en nombres entiers satisfai-

---

[1] *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, t. XXIV, 1917, pp. 97-98 (Question n° 4755).

sant aux trois conditions suivantes que : 1° son hypoténuse soit un nombre carré; 2° la somme des deux autres côtés soit carrée; 3° la somme du plus grand côté et du côté moyen soit aussi un carré.

« Je désire savoir si cette question a été posée par quelque « autre savant et si elle a été résolue. »

3. — En ce qui concerne tout d'abord le côté historique de la question posée par M. Gino Loria, il y a notamment beaucoup à dire au sujet de ce problème de Torricelli.

Dans les deux premières, en effet, des trois conditions simultanées qui constituent ce problème, on reconnaît de suite un célèbre problème de Fermat, qui offre cette particularité que sa solution la *plus simple* est formée par les côtés d'un triangle rectangle dont les mesures sont des nombres entiers de treize chiffres chacun! L'énoncé se trouve dans une des Observations sur Diophante :

« *Invenire triangulum rectangulum numero, cujus hypote-* « *nusa sit quadratus et pariter summa laterum circa rectum.*

« Triangulum quæsitum representant tres numeri se- « quentes :

4 687 298 610 289 ,

4 565 486 027 761 ,

1 061 652 293 520 .

« Formatur autem a duobus numeris sequentibus[1] :

2 150 905 , 246 792 . »

La lettre de Mersenne à Torricelli.

4. — Nous tenons de Fermat lui-même que l'énoncé de son problème fut communiqué par lui aux plus grands géomètres de l'époque. C'est ce qui résulte nettement de la lettre à Mersenne d'août 1643, dont j'extrais le passage suivant[2] :

---

[1] *Œuvres de Fermat*, t. I, 1891, p. 336 [observations sur Diophante, observation XLIV], t. III, 1896, p. 270.

[2] Lettre de Fermat à Mersenne, ? août 1643, *Œuvres de Fermat*, t. II, 1894, p. 261.

« Et, afin que je ne vous tienne pas plus longuement en « suspens, j'ai résolu toutes les questions que j'ai proposées « à ces messieurs, dont je ne vous citerai maintenant qu'un « exemple, pour leur ôter seulement la mauvaise impression « qu'ils avaient conçue contre moi comme leur ayant proposé « un amusement et un travail inutile. Je choisirai pour mon « exemple une des plus belles propositions que je leur ai « faites : *Trouver un triangle duquel le plus grand côté soit « quarré, et la somme des deux autres soit aussi quarrée.* « Voici le triangle :

4 687 298 610 289

4 565 486 027 761

1 061 652 293 520 . »

Nous avons aussi à ce sujet le témoignage de Billy ; l'auteur de l'*Inventum novum*, qui s'est personnellement occupé d'ailleurs de la question[1], affirme que Fermat proposa son problème aux plus doctes d'entre les mathématiciens[2] :

« *Invenire duos numeros quorum summa faciat quadra- « tum et quorum quadrata simuljuncta faciant quadrato- « quadratum.* Istud problema idem plane est superiori quo « quœrebatur triangulum rectangulum cujus hypotenusa et « summa laterum sit quadratus, aliasque fuit propositum « plerisque doctissimis mathematicis a Fermatio nostro sine « solutione... »

5. — Ma première pensée, dès la lecture de la question soulevée par M. Gino Loria, fut que Torricelli devait avoir eu connaissance directement ou indirectement du problème de Fermat. Ce problème n'est pas, en effet, par sa solution ni même par son énoncé d'une simplicité telle qu'il ait pu se présenter séparément à deux géomètres contemporains. J'ai trouvé ultérieurement l'explication désirée dans un passage d'une lettre de Mersenne à Torricelli en date du 25 décembre 1643, d'où il résulte que Fermat fit proposer son problème à Torricelli par l'intermédiaire de Mersenne.

---

[1] *Doctrinæ analyticæ inventum novum*, I, 22, 25, 45 et III, 32.
[2] *Doctrinæ analyticæ inventum novum*, I, 45.

Voici ce passage de la lettre de MERSENNE à TORRICELLI[1] :

« Clarissimus geometra, Senator Tholosanus Fermatius, « tibi (per me), sequens problema solvendum proponit, quod « tuo de conoideo acuto infinito æquivaleat. Invenire trian- « gulum rectangulum in numeris, cujus latus majus sit qua- « dratum, summaque duorum aliorum laterum etiam sit « quadratum, denique summa majoris et medii lateris sit « etiam quadratum.

« Exempli gratia : in triangulo 5, 4, 3 opportet 5 esse « numerum quadratum ; deinde summa 4 et 3, hoc est 7, « foret quadratus numerus, denique summa 5 et 4, hoc est 9, « esset quadrata. »

Il est ainsi parfaitement établi que, dès le début de l'année 1644, l'attention de TORRICELLI avait été, au moins par l'intermédiaire de MERSENNE, appelée sur le problème de FERMAT.

Leibniz s'est-il occupé du problème de Fermat?

6. — Avant de pousser plus loin l'examen de cette question tout spécialement intéressante, je désire ouvrir une parenthèse sur un autre point de l'histoire de ce même problème et précisément encore sur la transmission de son énoncé aux contemporains de FERMAT.

L. EULER, à qui l'on doit plusieurs mémoires sur la question et qui a le second (après BILLY) publié une démonstration précise du résultat simplement énoncé par FERMAT, attribue ce problème à LEIBNIZ, dans une première pièce datée du 15 novembre 1775[2] : « Hoc problema, a LEIBNIZIO « olim propositum, eo magis est notatu dignum, quod mi- « nimi numeri sint vehementer grandi, siquidem positivi « desiderentur... »

Puis, dans une seconde pièce du 18 mai 1780[3], il l'attribue

---

[1] *Discepoli di Galileo*, t. XLI, f° 9, recto.
Œuvres de Fermat, t. IV, Paris, 1912, p. 82-83.
Voir aussi la lettre de TORRICELLI à CARCAVI du 8 juillet 1646 (*Œuvres de Fermat*, t. IV, p. 88).

[2] *Miscellanea analytica* [*Commentationes arithmeticæ*, t. II éd. 1849, pp. 44-52], et *Opuscula analytica*, Petropoli, t. I. 1783, p. 335.

[3] De tribus pluribusve numeris inveniendis, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum (18 mai 1780). *Commentationes arithmeticæ*, édition de 1849, t. 2, p. 397-402.

à FERMAT : « Celebre est et nuper ab illustri LAGRANGE sin-
« gulari studio pertractum problema a FERMATIO olim pro-
« positum... » Une autre pièce de la même époque [1] attribue encore et très nettement ce problème à FERMAT.

7. — En raison de l'intérêt tout spécial qui s'attache à tout ce qui se rapporte à d'aussi grands noms, j'ai recherché des traces d'une pareille étude dans l'œuvre immense de LEIBNIZ.

La question de priorité entre LEIBNIZ et le géomètre de Toulouse ne se pose nullement, puisque l'énoncé du problème fut rendu public dès 1643, c'est-à-dire trois ans avant la naissance de LEIBNIZ. Il est même douteux que LEIBNIZ, qui n'avait pas atteint sa vingtième année à la mort de FERMAT — (naissance de LEIBNIZ : 1646 ; mort de FERMAT : 1665) — ait pu s'occuper de la question du vivant de celui-ci.

8. — Il s'agit seulement de savoir si LEIBNIZ, à une date quelconque de son existence, a pu apporter une contribution plus ou moins importante à la résolution de ce problème.

Reprenons la solution du problème de FERMAT. A un facteur carré près, l'arithmotriangle pythagorique peut être représenté par les équations

$$a = 1 , \qquad b = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} , \qquad c = \frac{2t}{1 + t^2} ,$$

dans laquelle t désigne un nombre rationnel ; ce nombre est assujetti à vérifier tout d'abord la double inégalité,

$$0 < t < 1 ,$$

---

[1] Solutio problematis Fermatiani de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum, ad mentem Ill. Lagrange adornata (5 juin 1780). *Commentationes arithmeticæ*, édition de 1849, pp. 403-405.

A ces références d'EULER, il convient d'ajouter une courte note des *Opera postuma* (Petropoli, t. I, 1862, p. 221) dans laquelle EULER établit l'équivalence des équations :

$$2x^4 - y^4 = \square , \qquad 8p^4 + q^4 = \square .$$

Ces équations ne sont autres que celles que forme LAGRANGE dans son étude du problème de Fermat. (Sur quelques problèmes de l'Analyse de Diophante citée plus loin.) Voir aussi au sujet de ces équations :

M. LEBESGUE. Résolution des équations biquadratiques

$$z^2 = x^4 \pm 2^m y^4 , \qquad z^2 = 2^m x^4 - y^4 , \qquad 2z^2 = x^4 \pm y^4 ;$$

Journal de Mathématiques pures et appliquées (de Liouville), [1], t. XVIII, 1853, p. 73-86.

Edouard LUCAS a étudié les équations de cette forme dans ses *Recherches sur l'analyse indéterminée et l'arithmétique de Diophante.*

Le problème de Fermat est résolu dans cet ouvrage de Ed. LUCAS.

assurant les signes positifs des mesures des cathètes et à satisfaire d'autre part à l'équation qui traduit la condition imposée $b + c = \square$. Cette équation est une équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT du quatrième ordre :

$$(1 + t^2)(1 + 2t - t^2) = \square .$$

Si le second membre est pris égal au carré de l'expression

$$1 + t - \frac{\lambda}{2} t^2 ,$$

dans laquelle λ est une indéterminée rationnelle, cette équation devient

$$(\lambda^2 + 4) t^2 - 4(\lambda + 2) t - 4(\lambda - 1) = 0 ,$$

et la condition de rationalité de t est alors :

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square .$$

Telle est la forme canonique à laquelle peut être réduite l'équation indéterminée dont dépend le problème de FERMAT.

Le problème de FERMAT *est donc réductible à l'étude arithmogéométrique d'une cubique harmonique dont les invariants sont :*

$$g_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g_3 = 0 .$$

Les conditions d'inégalité imposées à t entraînent la condition suivante pour λ : ce nombre rationnel doit être ou bien compris dans l'intervalle $0 < \lambda < 1$ ou bien supérieur à 8. Sinon, c'est-à-dire si λ est compris entre l'unité et huit, car il ne saurait être négatif en vertu même de l'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square ,$$

la solution de celle-ci correspond non plus au problème de FERMAT, mais au problème pour lequel la différence et non la somme des cathètes est un nombre carré. C'est ce qui se produit pour $\lambda = 1$ ou encore pour $\lambda = \frac{49}{36}$, cas auxquels correspond un véritable triangle $t = \frac{12}{5}$ de côtés 169, 120 et 119.

9. — Ainsi donc, le problème de FERMAT dépend analytiquement d'une équation indéterminée qui peut aussi être mise sous la forme :

$$\lambda + \frac{8}{\lambda} = \square \cdot$$

Or il se trouve que LEIBNIZ a rencontré ce genre d'équations,

$$x + \frac{a}{x} = \square ,$$

où figure un nombre rationnel a (sans rapport avec l'hypoténuse de l'arithmotriangle pythagorique considéré plus haut); il reste trace de ces recherches de LEIBNIZ dans les deux pièces suivantes :

a) *Invenire triangulum rectangulum in numeris cujus area sit quadratus* (29 décembre 1678), *Leibnizens mathematische Schriften,* Gerhardt, [2], III, 1863, p. 120-125.

b) *Exercitium ad promovendam scientiam numerorum,* ibid., [2], III, 1863, p. 114-119.

Dans la première de ces pièces, il est question de l'équation particulière :

$$x - \frac{1}{x} = \square ;$$

tandis que dans la seconde il s'agit de l'équation générale :

$$x + \frac{a}{x} = \square \cdot$$

C'est la seule trace d'un travail de LEIBNIZ sur ce sujet que j'aie pu jusqu'ici retrouver. La question reste donc posée.

L'origine probable du problème de Torricelli.

10. — Revenons à TORRICELLI et à son problème retrouvé par M. Gino LORIA.

La solution donnée par FERMAT lui-même, retrouvée par BILLY et par EULER

$$a = 4\ 687\ 298\ 610\ 289 ,$$

$$b = 4\ 565\ 486\ 027\ 761 ,$$

$$c = 1\ 061\ 652\ 293\ 520 ,$$

est la plus simple de toutes les solutions en nombre illimité de ce problème, qui peut être rattaché à l'étude arithmogéométrique d'une cubique plane ou d'une biquadratique gauche[1]. Cette propriété est formellement énoncée dans le passage ci-dessus rapporté de la pièce, en date du 15 novembre 1775, des *Miscellanea Analytica* d'EULER. Ce point fut d'ailleurs à nouveau établi par l'analyse remarquable de LAGRANGE[2], en 1777.

La somme $a + b$ des valeurs précédentes de l'hypoténuse a et de la cathète moyenne b est un nombre (terminé par 50) qui ne saurait être carré parfait. Cette solution la plus simple ne satisfait donc pas à la troisième condition de TORRICELLI; d'où il résulte que le problème de TORRICELLI, s'il est possible *en nombres entiers positifs,* n'admet pas de solutions de moins de treize chiffres. La condition supplémentaire imposée par le disciple de GALILÉE ne fait donc que compliquer un problème déjà dénué de solution simple.

11. — Il se peut pourtant que TORRICELLI ait voulu poser un problème qui n'est guère différent de celui de FERMAT, qui lui est intimement lié et qui admet une solution simple.

L'étude du problème de FERMAT, lorsqu'il est soumis à certaines méthodes de résolution, le rend, en effet, absolument inséparable du problème pour lequel la somme des cathètes est remplacée par leur différence. C'est ce qui se produit notamment dans l'analyse géométrique, au moyen d'une cubique plane ou d'une biquadratique gauche; la somme des cathètes n'est pas alors nécessairement la somme de leurs valeurs arithmétiques.

BILLY a parfaitement rendu compte, dans son analyse, de cette circonstance; il a le premier signalé l'existence d'un arithmotriangle pythagorique remarquable dont les côtés sont des nombres bien simples :

$$a = 169 \ , \qquad b = 120 \ . \qquad c = 119 \ ;$$

[1] Voir à ce sujet mes « Notions d'arithmogéométrie » dans *L'Enseignement mathématique,* XIXe année, mai 1917, p. 167-168.

[2] Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante, Nouveau Mémoire de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1777; *Œuvres de Lagrange,* t. IV, Paris, 1869, pp. 377-398.

ces nombres satisfont aux conditions simultanées :

$$a = \square\ , \qquad b - c = \square\ .$$

Pour cet arithmotriangle pythagorique la troisième condition de TORRICELLI *est satisfaite, que l'on considère la somme ou la différence de l'hypoténuse et de la cathète moyenne,* puisque les nombres précédents vérifient les deux conditions

$$a + b = 289 = \square\ ,$$
$$a - b = 49 = \square\ ;$$

il convient de remarquer que ces deux conditions simultanées se réduisent à une seule, puisque le produit $(a + b)(a - b)$ est égal au carré de la cathète c.

La véritable signification et l'origine du problème de TORRICELLI se rattachent-elles aux remarques qui viennent d'être faites ? C'est possible, mais peu vraisemblable.

12. — L'origine plus probable du problème de TORRICELLI me semble résider dans la remarque que, si la somme des côtés $a + b$ n'est pas un carré, dans l'exemple donné par FERMAT, par contre la *somme de l'hypoténuse et du plus petit côté est un carré :*

$$a + c = 5 \cdot 748 \cdot 950 \cdot 903 \cdot 809 = (2 \cdot 397\ 697)^2\ .$$

Indépendamment de ce fait particulier et d'une manière plus générale, un *triangle en nombres* (selon l'expression des géomètres du XVIIe siècle) étant représenté par les nombres entiers p et q, les côtés sont exprimables par les formules

$$a = (p^2 + q^2).\lambda\ , \qquad b = (p^2 - q^2).\lambda\ , \qquad c = 2pq.\lambda\ ,$$

dans lesquelles λ est un paramètre entier de similitude : ce sont les formules de BRAHMAGUPTA. Les trois conditions

$$a = \square\ , \qquad a + c = \square\ , \qquad b + c = \square\ ,$$

deviennent dans ce mode de représentation :

$$(p^2 + q^2)\lambda = \square\ , \qquad (p + q)^2\lambda = \square\ , \qquad (p^2 + 2pq - q^2)\lambda = \square\ :$$

la seconde n'est autre que $\lambda = \square$; *le triangle à côtés premiers entre eux semblable à un triangle de cette espèce*, triangle qui s'obtient en prenant $\lambda = 1$ et p et q premiers entre eux, remplit *ipso facto* cette condition. Abstraction faite d'une similitude assez banale, il y a donc lieu de se borner à ce cas des triangles à côtés premiers entre eux, triangles que FRÉNICLE a nommés *triangles primitifs*.

De ce qui précède, il résulte donc que *dans tout triangle primitif la somme de l'hypoténuse et d'une des deux cathètes est toujours un nombre carré*. Cette propriété bien simple ne pouvait pas être inconnue de TORRICELLI.

Tout s'explique donc. Dans l'exemple de FERMAT, le triangle primitif dont les *nombres* sont

$$p = 2\ 150\ 905\ ,$$

$$q = \quad 246\ 792\ ,$$

c'est la somme de l'hypoténuse et de la plus petite cathète qui se trouve être un carré parfait. Cette circonstance se produit toutes les fois que l'inégalité

$$p^2 - q^2 > 2pq\ ,$$

est vérifiée, c'est-à-dire lorsque le rapport $\frac{p}{q}$ des nombres du triangle (p étant le plus grand des deux nombres) est supérieur à $\sqrt{2} + 1$. Dans le cas actuel, cette condition est manifestement remplie, $\frac{p}{q}$ étant de l'ordre de 8.

Le problème de TORRICELLI consiste précisément à rechercher un triangle primitif, appartenant à cette famille des solutions du problème de FERMAT, mais pour lequel le rapport $\frac{p}{q}$ des deux nombres du triangle soit inférieur à la limite précédente $\sqrt{2} + 1$. Et nous devons conclure que *la condition supplémentaire de* TORRICELLI *est une simple condition d'inégalité, le problème de* TORRICELLI *étant analytiquement identique à celui de* FERMAT.

Remarque sur les deux dernières conditions du théorème de Torricelli.

13. — Laissant de côté la condition que l'hypoténuse soit mesurée par un carré, prenons l'ensemble des deux conditions :

$$b + c = \square , \qquad a + c = \square .$$

Il n'est pas possible d'ailleurs de leur adjoindre la condition analogue :

$$a + b = \square ;$$

si dans un arithmotriangle pythagorique les trois sommes de côtés pris deux à deux étaient, en effet, trois nombres carrés parfaits, les nombres de ce triangle satisferaient aux trois équations :

$$(p + q)^2\lambda = \square , \qquad 2p^2\lambda = \square , \qquad (p^2 + 2pq - q^2)\lambda = \square ;$$

et λ serait simultanément un carré et le double d'un carré.

Reste donc à étudier le système des deux conditions :

$$b + c = \square , \qquad a + c = \square ;$$

la seconde permet de limiter le problème aux triangles primitifs ($\lambda = 1$) pour lesquels elle est d'ailleurs *ipso facto* remplie. Le problème est ainsi réductible à une seule équation de Brahmagupta-Fermat du second ordre

$$p^2 + 2pq - q^2 = \square ,$$

dont la solution générale est

$$\frac{q}{p} = 2\frac{1 - x}{1 + x^2} ,$$

en fonction d'un paramètre rationnel quelconque x.

On peut encore prendre pour un de ces arithmotriangles

pythagoriques, qui ne sont définis qu'à un facteur carré près, celui dont les côtés sont :

$$a = \frac{c^2}{4} + 1 , \qquad b = \frac{c^2}{4} - 1 , \qquad \text{avec} \qquad c = \frac{\lambda^2 + (\lambda - 1)^2}{\lambda} ,$$

λ restant un paramètre arbitraire.

Ce problème est donc de ceux qui se résolvent complètement et dont la solution générale peut être formulée en fonction de deux paramètres.

14. — De la solution générale qui précède de cette question bien simple, résulte immédiatement l'équation dont dépend le problème de TORRICELLI. Il suffit de poser, à un facteur près sans importance,

$$p = 1 + x^2 , \qquad q = 2(1 - x) ;$$

et de résoudre le problème des arithmodistances pour l'arithmoparabole que représentent, dans le système de coordonnées rectangulaires p et q, ces deux équations paramétriques ; l'équation obtenue,

$$(x^2 + 1)^2 + 4(x - 1)^2 = \square ,$$

est une équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT du quatrième ordre :

$$x^4 + 6x^2 - 8x + 5 = \square .$$

Les solutions acceptables doivent satisfaire en outre à des inégalités qui assurent les signes positifs des cathètes des arithmotriangles pythagoriques correspondants, ainsi que l'ordre de grandeur $c > b$; il faut donc que q soit positif et que le rapport $\frac{p}{q}$ soit compris entre l'unité et $\sqrt{2} + 1$. Des trois inégalités

$$x < 1 < \frac{1 + x^2}{2(1 - x)} < \sqrt{2} + 1 ,$$

il résulte que le nombre rationnel x doit être compris soit dans l'intervalle

$$-(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{\sqrt{2} + 1} < x < -(\sqrt{2} + 1) ,$$

soit dans l'intervalle :

$$\sqrt{2} - 1 < x < -(\sqrt{2} + 1) + 2\sqrt{\sqrt{2} + 1} .$$

En posant

$$x^4 + 6x^2 - 8x + 5 = (x^2 + 1 - 2\mu)^2 ,$$

cette équation indéterminée devient

$$(\mu + 1)x^2 - 2x + 1 + \mu - \mu^2 = 0 ,$$

et la condition de rationalité de x fournit la forme canonique suivante de l'équation du problème :

$$\mu^3 - 2\mu = \square .$$

Le problème de TORRICELLI *est ainsi rattaché à l'étude d'une cubique harmonique d'invariants* $g_2 = 8$, $g_3 = 0$.

Cette équation $\mu^3 - 2\mu = \square$ dérive de l'équation déjà formée $\lambda^3 + 8\lambda = \square$ par la substitution :

$$\lambda = \mu - \frac{2}{\mu} .$$

De la décomposition de certaines équations de Brahmagupta-Fermat.

15. — Soit tout d'abord une équation cubique de BRAHMAGUPTA-FERMAT, telle que le polynôme entier cubique de son premier membre soit doué au moins d'un zéro rationnel ; si x_0 est le zéro rationnel du polynôme cubique $f(x)$, par une transformation $x = x_0 + ky$, celui-ci se change en un polynôme $y.g(y)$, produit par la nouvelle indéterminée y d'un trinôme $g(y)$ du second degré.

L'équation de FERMAT $f(x) = \square$ devient ainsi $y.g(y) = \square$, ou en explicitant les coefficients :

$$y(Ay^2 + By + C) = \square ;$$

A, B, C pouvant toujours être considérés comme étant des entiers qui ne sont pas nécessairement premiers entre eux,

mais dont le plus grand diviseur commun n'a que des facteurs premiers à la première puissance.

L'indéterminée y est un nombre rationnel; soit $\frac{P}{Q}$ la fraction irréductible qui lui est égale. L'équation précédente peut alors être écrite :

$$PQ(AP^2 + BPQ + CQ^2) = \square .$$

Sous cette forme, on voit que tout facteur premier de P, qui n'entre pas sous une puissance paire, dans la composition factorielle de ce nombre P doit être un facteur premier, sous une puissance impaire, du coefficient C. De même, tout facteur premier de Q, qui ne figure pas sous une puissance paire dans la décomposition de Q, doit aussi être un facteur premier, sous une puissance impaire, du coefficient A.

Soit donc α un diviseur quelconque, à facteurs premiers simples, du coefficient A et γ un diviseur quelconque, de même nature, du coefficient C; soient A′ et C′ les quotients de A par α et de C par γ :

$$A = \alpha A' , \qquad C = \gamma C' ;$$

en se bornant aux couples α et γ de diviseurs qui sont premiers entre eux, il y aura lieu de faire les essais de nombres P et Q des formes suivantes :

$$P = \gamma p^2 , \qquad Q = \pm \alpha q^2 ;$$

dans ces formules, p et q sont deux entiers qui doivent satisfaire à une nouvelle équation de Brahmagupta-Fermat :

$$\pm (A'\gamma p^4 + Bp^2q^2 + C'\alpha q^4) = \square ;$$

cette équation est bicarrée. Par suite :

La connaissance d'un zéro rationnel du polynôme f(x) *du premier membre d'une équation cubique de* Brahmagupta-Fermat *permet de* DÉCOMPOSER L'ÉTUDE DE CELLE-CI EN CELLES D'UN NOMBRE LIMITÉ D'ÉQUATIONS BICARRÉES DE Brahmagupta-Fermat.

L'intérêt de cette proposition réside dans l'importance considérable des équations bicarrées de Brahmagupta-Fermat,

qui ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux généraux ou spéciaux.

16. — Un cas particulier très important est celui pour lequel les coefficients A, C du trinôme du second degré se réduisent tous deux aux nombres $+1$ ou -1. Les quatre cas correspondants se réduisent effectivement à deux par un simple changement de signe de l'indéterminée y. Ce sont les deux cas :

$$y(y^2 + By \pm 1) = \square \cdot$$

L'équation correspondante

$$PQ(P^2 + BPQ + \varepsilon Q^2) = \square \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

ne peut être vérifiée qu'en prenant pour P et Q des nombres rationnels dont les valeurs absolues sont des carrés parfaits ; il y aura lieu de poser

$$P = p^2 , \qquad Q = \varepsilon' q^2 \qquad (\varepsilon' = \pm 1)$$

et par suite de rechercher les solutions de l'équation bicarrée

$$\varepsilon'(p^4 + \varepsilon' Bp^2q^2 + \varepsilon q^4) = \square \cdot$$

Comme le signe de ε est déterminé par l'énoncé même de la question, il suffira de considérer successivement les deux équations

$$p^4 + Bp^2q^2 + \varepsilon q^4 = \square ,$$
$$-p^4 + Bp^2q^2 - \varepsilon q^4 = \square \cdot$$

Soit, pour fixer les idées [1], l'équation arithmotrigonométrique $\sin u + \sin v = 1$; elle peut être mise sous la forme équivalente

$$\sin X - \cos Y = 1 ;$$

par définition même des équations arithmotrigonométriques, il s'agit de rechercher les solutions rationnelles $x = \operatorname{tang}\frac{X}{2}$ et $y = \operatorname{tang}\frac{Y}{2}$ de l'équation

$$\frac{2x}{1 + x^2} = \frac{2}{1 + y^2} ,$$

[1] Voir les *Notions d'arithmogéométrie*, paragraphe 74 : *L'Enseignement mathématique*, 1917, p. 240.

ou encore les arithmopoints de la cubique d'équation :

$$y^2 = x + \frac{1}{x} - 1 \ ;$$

cette équation

$$x(x^2 - x + 1) = \square$$

rentre dans la catégorie précédente. Elle ne peut être satisfaite que si x est au signe près un carré parfait. Mais comme le trinôme $x^2 - x + 1$ est dénué de zéros réels et garde toujours le signe positif, pour toutes les variations de x, il suffit de borner les essais au seul cas $x = z^2$; l'équation bicarrée obtenue ainsi,

$$z^4 - z^2 + 1 = \square \ ,$$

a été rencontrée par L. Euler[1] qui en a établi l'impossibilité, sauf pour les valeurs $z = 0, \pm 1, \pm \infty$. Par suite :

L'équation arithmotrigonométrique

$$\sin u + \sin v = 1$$

est impossible et n'admet que des solutions banales.

17. — Considérons maintenant et d'une manière analogue, une équation de Brahmagupta-Fermat du quatrième ordre $f(x) = \square$, dans laquelle le polynôme $f(x)$ du quatrième degré est ou peut être décomposé en un produit de deux polynômes quadratiques à coefficients rationnels. Prenons :

$$f(x) \equiv (Ax^2 + Bx + C)(A'x^2 + B'x + C') \ ;$$

les coefficients A, B, C, A′, B′, C′ peuvent toujours être supposés entiers; le plus grand commun diviseur de (A, B, C) et celui de (A′, B′, C′) peuvent tous deux être supposés dépourvus de facteurs affectés d'un exposant autre que l'unité. Ces deux plus grands communs diviseurs peuvent en outre être supposés premiers entre eux.

En explicitant la valeur $\frac{P}{Q}$, supposée fraction irréductible, du nombre rationnel x, l'équation devient

$$(AP^2 + BPQ + CQ^2)(A'P^2 + B'PQ + C'Q^2) = \square \ .$$

[1] Id., paragraphe 88, p. 259.

Tout facteur premier de la valeur numérique de l'un des trinômes, $AP^2 + BPQ + CQ^2$ par exemple, qui se trouve engagé sous une puissance impaire dans la composition factorielle de ce nombre, doit se retrouver, et sous une puissance impaire, dans la composition factorielle de la valeur numérique de $A'P^2 + B'PQ + C'Q^2$.

Cette remarque peut surtout être utilisée avec profit. Supposons, par exemple, que l'équation à étudier soit

$$(x^2 + 1)(3 - x^2) = \square ,$$

ou encore

$$(P^2 + Q^2)(3P^2 - Q^2) = \square .$$

Un diviseur premier commun à $P^2 + Q^2$ et $3P^2 - Q^2$ devrait diviser $4P^2$, c'est-à-dire $2P$; ce facteur ne peut être un facteur de P, car il devrait diviser Q qui est premier avec P; ce facteur ne peut donc être que le nombre deux ou l'unité au signe près. Mais, le premier facteur $P^2 + Q^2$ étant essentiellement positif, la question de signe disparaît; il ne reste que deux alternatives; ou bien

$$P^2 + Q^2 = \square \quad \text{avec} \quad 3P^2 - Q^2 = \square ,$$

ou bien

$$P^2 + Q^2 = 2\square \quad \text{avec} \quad 3P^2 - Q^2 = 2\square .$$

Le premier système contient une équation impossible, $3P^2 - Q^2 = \square$, puisque le nombre trois ne saurait être somme de deux carrés (théorème de Fermat); il reste donc le seul cas du système :

$$P^2 + Q^2 = 2\square , \qquad 3P^2 - Q^2 = 2\square .$$

En posant alors

$$P = \alpha + \beta , \qquad Q = \alpha - \beta ,$$

ce système devient le suivant, beaucoup plus symétrique :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \square , \qquad \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = \square .$$

Ce dernier système se transforme par la substitution définie par la relation

$$\frac{\alpha}{2t} = \frac{\beta}{1 - t^2}$$

en une nouvelle équation unique de BRAHMAGUPTA-FERMAT :

$$(t^2 + 1)^2 + 8t(1 - t^2) = \square .$$

Ainsi donc l'équation primitivement considérée a été transformée en une équation du même degré ; en réalité, la question a fait un grand pas vers sa solution, car alors que l'équation donnée, c'est-à-dire l'équation

$$3 + 2x^2 - x^4 = \square ,$$

n'appartient pas à l'un des types connus de résolubilité, à la nouvelle équation

$$t^4 - 8t^3 + 2t^2 + 8t + 1 = \square ,$$

au contraire, il est possible d'appliquer les méthodes de FERMAT et cette application des méthodes générales peut être effectuée pour l'une ou l'autre des deux termes extrêmes de l'équation.

Le mieux est d'égaler le polynôme du premier membre au carré du trinôme $t^2 + 4zt + 1$; l'équation restante, du second degré en t,

$$(z + 1)t^2 + 2z^2t + z - 1 = 0 ,$$

ne saurait avoir de racine rationnelle puisque l'équation

$$z^4 - z^2 + 1 = \square$$

est impossible.

Ce dernier résultat tient au fait que l'équation

$$(x^2 + 1)(3 - x^2) = \square$$

est transformée en l'équation

$$X^4 - (2X + 2)^2 = \square$$

par la substitution homographique

$$x = 1 + \frac{2}{X} ;$$

l'équation transformée peut être traitée par la méthode de FERMAT, en posant :

$$X^4 - 4(X + 1)^2 = (X^2 - 2\lambda)^2 ;$$

λ doit satisfaire à l'équation du paragraphe précédent :

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = \square \ .$$

L'impossibilité de l'équation considérée, ou encore celle du système des équations simultanées :

$$X^2 + 2X + 2 = \square \ , \qquad X^2 - 2X - 2 = \square \ ,$$

est équivalente à celle de l'équation $\sin u + \sin v = 1$.

Application des considérations précédentes au problème de Torricelli.

18. — Au paragraphe 8, la solution du problème de Fermat a été rattachée par une voie toute naturelle à l'étude des solutions rationnelles de l'équation de Brahmagupta-Fermat :

$$(1 + t^2)(1 + 2t - t^2) = \square \ .$$

Cette équation est du type qui vient d'être considéré à l'instant : le polynôme du quatrième degré du premier membre est décomposé en un produit de facteurs quadratiques à coefficients rationnels.

La traduction analytique de l'énoncé du problème de Fermat pouvait fort bien se présenter à Torricelli sous une forme équivalente, à la seule condition d'utiliser les formules de Diophante et non les formules de Brahmagupta, dans la représentation de l'arithmotriangle pythagorique.

Ces formules de Diophante,

$$b = \frac{P^2 - Q^2}{P^2 + Q^2} a \ , \qquad c = \frac{2PQ}{P^2 + Q^2} a \ ,$$

ramènent la recherche des arithmotriangles pythagoriques, jouissant des deux propriétés énoncées $a = \square$ et $b + c = \square$, à l'étude des solutions entières de l'équation indéterminée :

$$(P^2 + Q^2)(P^2 + 2PQ - Q^2) = \square \ .$$

Tout facteur premier de l'un des deux polynômes quadratiques doit être un facteur premier de l'autre, et dans les

deux cas sous des puissances impaires; or tout diviseur commun des deux polynômes quadratiques appartient aussi à leur somme et à leur différence :

$$2P(P+Q)\ , \qquad 2Q(P-Q)\ ;$$

P et Q étant premiers entre eux, par définition, ce facteur commun ne peut être que le nombre deux.

Comme d'autre part, en raison de la présence de P^2+Q^2, aucun doute n'est possible sur les signes, l'équation se décompose soit en le système :

$$P^2+Q^2=\square\ , \qquad P^2+2PQ-Q^2=\square\ ,$$

soit en le système :

$$P^2+Q^2=2\square\ , \qquad P^2+2PQ-Q^2=2\square\ ;$$

le second système se ramène d'ailleurs au premier par la substitution $P+Q=2P_1$, $P-Q=2Q_1$; en d'autres termes, à toute solution t_1 correspond une nouvelle solution $t=\frac{1-t_1}{1+t_1}$, ce qui résulte de la symétrie qui existe dans les rôles des deux cathètes.

L'équation

$$(P^2+Q^2)(P^2+2PQ-Q^2)=\square\ ,$$

du problème de Fermat *se décompose ainsi en deux équations simultanées*

$$P^2+Q^2=\square\ , \qquad P^2+2PQ-Q^2=\square\ ,$$

dont le système lui est équivalent.

Nous avons alors :

$$a+c=\frac{(P+Q)^2}{P^2+Q^2}a=\square\ ,$$

nous retrouvons ainsi que la somme de l'hypoténuse et de *l'une* des deux cathètes est un nombre carré parfait.

La solution générale de l'équation $P^2+2PQ-Q^2=\square$ étant donnée par la formule

$$\frac{Q}{P}=2.\frac{1-x}{1+x^2}\ ,$$

nous sommes, par cette méthode et en utilisant l'équation $P^2 + Q^2 = \square$, ramenés à l'équation,

$$(x^2 + 1)^2 + 4(x - 1)^2 = \square \ ;$$

du paragraphe 14.

19. — Pour terminer, il convient de remarquer que les considérations générales du paragraphe 15 s'appliquent précisément aux équations

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square \qquad \text{et} \qquad \mu^3 - 2\mu = \square$$

des paragraphes 8 et 14. J'ai déjà signalé que la seconde n'est qu'une conséquence de la première par la transformation

$$\lambda = \mu - \frac{2}{\mu} \ ,$$

qui implique d'ailleurs que λ soit un carré parfait.

L'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square \qquad \text{ou} \qquad \lambda(\lambda^2 + 8) = \square$$

est bien de l'espèce considérée au paragraphe 15. En posant $\lambda = \frac{P}{Q}$, elle devient

$$PQ(P^2 + 8Q^2) = \square \ ;$$

Q ne peut avoir de facteur premier à une puissance impaire : c'est nécessairement au signe près un carré parfait. Quant à P, il est de même de l'une des formes $\pm p^2$ ou $\pm 2p^2$. Le produit PQ devant être positif, la question de signe ne se pose pas et il suffit de prendre :

$$P = 2p^2 \quad \text{ou} \quad p^2 \qquad \text{et} \qquad Q = q^2 \ .$$

La première hypothèse, $P = 2p^2$, $Q = q^2$ donne :

$$2(p^4 + 2q^4) = \square \ ;$$

le nombre entier p doit donc être pair ; soit $p = 2p'$; l'équation devient

$$8p'^4 + q^4 = \square \ ;$$

et la solution correspondante est $\lambda' = 8\frac{p'^2}{q^2}$. Quant à la se-

conde hypothèse, elle donne la même équation :

$$p^4 + 8q^4 = \square ,$$

mais avec $\lambda = \frac{p^2}{q^2}$. Entre les deux solutions λ et λ', qui correspondent ainsi à une même solution de l'équation

$$\omega^4 + 8 = \square ,$$

existe la relation $\lambda\lambda' = 8$, laissant invariante l'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square .$$

En résumé : les solutions de cette dernière équation sont des nombres rationnels carrés ou doubles de carrés, et elles se transforment en l'équation :

$$\omega^4 + 8 = \square .$$

Nous retombons ainsi sur l'analyse de LAGRANGE (pages 386 et 387 du mémoire cité); les plus simples solutions sont (d'après LAGRANGE) :

$$\omega = 1 , \quad \frac{7}{6} , \quad \frac{239}{13} , \ldots$$

20. — L'équation

$$\mu^3 - 2\mu = \square$$

se laisse traiter d'une manière analogue ; μ est au signe près un carré ou le double d'un carré et, suivant les cas, cette équation se transforme en l'une ou l'autre des équations :

$$2x^4 - y^4 = \square , \quad x^4 - 2y^4 = \square .$$

LAGRANGE (pages 378-379 de son remarquable Mémoire) a bien remarqué qu'alors que les équations $x^4 + y^4 = \square$, $x^4 \pm 4y^4 = \square$, $2(x^4 \pm y^4) = \square$, $x^4 + 2y^4 = \square$ sont impossibles, d'après DIOPHANTE, FERMAT ou EULER, il n'en est pas de même de l'une et de l'autre des deux équations

$$2x^4 - y^4 = \square , \quad x^4 - 2y^4 = \square ;$$

la première admet les solutions :

$$x = 1 \qquad y = 1$$
$$x = 13 \qquad y = 1$$
$$x = 1525 \qquad y = 1343$$
$$x = 2 \cdot 165 \cdot 017 \qquad y = 2 \cdot 372 \cdot 159 \ldots ;$$

la seconde admet les solutions[1] :

$$x = 3 \qquad y = 2$$
$$x = 113 \qquad y = 84$$
$$x = 57 \cdot 123 \qquad y = 6 \cdot 214 \ldots$$

Plus loin (p. 386 et 387), LAGRANGE a mis en évidence l'équivalence de chacune de ces deux équations avec l'équation $s^4 + 8t^4 = \square$ du paragraphe précédent. J'ai noté au paragraphe 6 qu'une pièce des *Opera postuma* de L. EULER concernait également l'équivalence des équatione $s^4 + 8t^4 = \square$ et $2x^4 - y^4 = \square$.

Si d'ailleurs on applique à la cubique d'équation

$$x^3 - 2x = y^2$$

la méthode de dérivation des arithmopoints au moyen de la tangente, on trouve que les coordonnées (x_2, y_2) du nouveau point d'intersection de la cubique avec la tangente au point (x_1, y_1) sont fournies par les formules :

$$x_2 = x_1 + 2y \cdot \rho \ , \qquad y_2 = y_1 + (3x^2 - 2)\rho \ ,$$

avec

$$\rho = \frac{16x^2 - 3y^4}{8x^2y^3} = \frac{4 + 12x^2 - 3x^4}{8y^3} \ ;$$

la loi de succession des abscisses est notamment la suivante :

$$x_2 = \left(\frac{x_1^2 + 2}{2y}\right)^2 \ ;$$

[1] Une erreur s'est glissée dans l'édition des *Œuvres* de LAGRANGE (p. 378), où le nombre y de la troisième solution particulière de l'équation $x^4 - 2y^4 = \square$ est égal à 2·614 ; alors que la véritable valeur de ce nombre est celle ci-dessus indiquée (6·214).

la cubique admet une série d'arithmopoints d'abscisses

$$x_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \qquad x_2 = \left(\frac{113}{84}\right)^2, \ldots$$

qui sont toutes des nombres rationnels carrés parfaits.

L'application au problème de FERMAT des principes généraux relatifs aux équations de BRAHMAGUPTA-FERMAT, soit cubiques à zéro rationnel, soit du quatrième degré à premier membre décomposable en un produit de facteurs rationnels du second degré, permet, en résumé, d'expliquer l'origine du problème de TORRICELLI; elle ramène méthodiquement, en outre, la discussion de l'équation de ce problème de FERMAT et d'EV. TORRICELLI à l'analyse de LAGRANGE et d'EULER.

Paris, le 5 février 1918.

REMARQUE SUR L'INTÉGRALE $\int uv\,dx$

PAR

M. Michel PETROVITCH (Belgrade).

Il est manifeste qu'il n'existe aucune fonction u de la variable x telle que l'intégrale définie

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty uv\,dx \tag{1}$$

ait une valeur finie, déterminée et différente de zéro *quel que soit le polynôme* v *en* x.

Un fait curieux est, cependant, à signaler: *il existe des fonctions* u *de* x *pour lesquelles l'intégrale* (1) *a une valeur finie, déterminée et différente de zéro quel que soit le polynôme* v *en* x *à coefficients nombres algébriques* (entiers, com-