

# NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

Autor(en): **Turrière, Emile**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-17324>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

(4<sup>e</sup> article)<sup>1</sup>

---

## L'arithmotrigonométrie.

70. — C'est dans une pièce en date du 1<sup>er</sup> mai 1780, *De casibus quibusdam maxime memorabilibus in analysi indeterminata, ubi imprimis insignis usus calculi angulorum in analysi Diophantea ostenditur*<sup>2</sup>, que L. EULER a introduit l'usage des nombres trigonométriques pour l'étude de certaines équations de l'analyse diophantine.

Ce mémoire traite de deux problèmes; chacun d'eux est résolu d'abord par la méthode algébrique; EULER montre ensuite combien est avantageux l'usage des rapports trigonométriques de certains angles auxiliaires pour la résolution de chacun de ces deux problèmes.

Le premier problème est relatif à la résolution de l'équation du quatrième degré à quatre variables :

$$x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 2v^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0 ,$$

admettant entre autres solutions entières les trois systèmes qui suivent :

$x = 20$ ,	$y = 17$ ,	$z = 17$ ,	$v = 12$ ;
39 .	25 ,	20 ,	12 ;
78 ,	65 ,	29 ,	24 .

---

<sup>1</sup> Voir l'*Enseignement mathématique*, 18<sup>e</sup> année, 15 mars 1916, pp. 81-110, et 15 novembre 1916, pp. 397-428; 19<sup>e</sup> année, 15 mai 1917, pp. 159-191.

<sup>2</sup> *Commentationes arithmeticae*, tomus posterior, pp. 366-379.

En posant

$$\frac{xy}{vz} = \sin \alpha, \quad \frac{xz}{vy} = \sin \beta,$$

EULER montre que toute la question revient à déterminer deux arcs  $\alpha$  et  $\beta$  dont les nombres trigonométriques sont rationnels et qui sont en outre tels que le produit de  $\sin \alpha$  et de  $\sin \beta$  soit un carré.

Le second problème, qui consiste de même à résoudre l'équation

$$x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2x^2v^2 - 2y^2z^2 - 2y^2v^2 - 2z^2v^2 = 0,$$

douée de solutions telles que

$$\begin{array}{cccc} x = 14, & y = 8, & z = 5, & v = 3, \\ 72, & 35, & 33, & 14, \\ 165, & 99, & 56, & 32, \end{array}$$

se traite d'une manière analogue, en posant

$$\frac{xy}{vz} = \cotang \alpha, \quad \frac{xz}{vy} = \cotang \beta,$$

et en déterminant des angles  $\alpha$  et  $\beta$ , à rapports trigonométriques rationnels, tels que

$$\cotang \alpha \cdot \cotang \beta = \square.$$

*A la même date, c'est-à-dire encore le 1<sup>er</sup> mai 1780, nous trouvons une autre pièce d'Euler consacrée aux angles d'un quadrilatère tels que leurs sinus soient proportionnels à des nombres rationnels donnés : Investigatio quadrilateri in quo singulorum angulorum sinus datam inter se teneant rationem; ubi artificia prorsus singularia in analysi Diophantea occurrunt*<sup>1</sup>.

Si, par exemple, les nombres donnés sont 15, 14, 11 et 6, les angles demandés sont :

$$A = 92^\circ 23' 16'',$$

$$B = 111^\circ 10' 06'',$$

$$C = 132^\circ 53' 14'',$$

$$D = 23^\circ 33' 24'',$$

<sup>1</sup> *Commentationes arithmeticae*, t. II, pp. 380-391.

dont la somme est bien  $360^\circ$  et dont les nombres trigonométriques sont :

$$\sin A = \frac{5}{24} \sqrt{23}, \quad \cos A = -\frac{1}{24},$$

$$\sin B = \frac{7}{36} \sqrt{23}, \quad \cos B = -\frac{13}{36},$$

$$\sin C = \frac{11}{72} \sqrt{23}, \quad \cos C = -\frac{49}{72},$$

$$\sin D = \frac{1}{12} \sqrt{23}, \quad \cos D = -\frac{11}{12}.$$

La solution de ce problème peut être obtenue d'une manière très rapide en introduisant le rapport commun de  $\sin A$ ,  $\sin B$ ,  $\sin C$  et  $\sin D$  aux nombres donnés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ . Si, en effet, on pose

$$\sin A = ax, \quad \sin B = bx, \quad \sin C = cx, \quad \sin D = dx,$$

la condition  $A + B + C + D = 2\pi$  se traduit par une équation du premier degré en  $x^2$ ; d'une manière générale, les expressions des quatre sinus sont irrationnelles, les nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  étant multipliés par la racine carrée d'un même nombre rationnel<sup>1</sup>: c'est ce qui se produit pour les trois exemples numériques traités complètement par EULER.

71. — Cette introduction des rapports trigonométriques de certains angles dans des recherches arithmétiques, cette confrontation de la trigonométrie plane (et peut-être aussi de la trigonométrie sphérique) et de l'analyse diophantine semblent devoir présenter un intérêt comparable à celui de l'arithmogéométrie, dont le fondement n'est autre que la confrontation des grandeurs de la géométrie et des nombres rationnels.

Indépendamment des considérations d'EULER sur l'avantage que peut présenter l'introduction des angles dans l'étude de certains problèmes diophantins, j'avais rencontré — dans les derniers paragraphes de mon examen du Problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise — des équations tri-

<sup>1</sup> Il serait intéressant de rechercher, à ce propos, si, pour un choix convenable des données  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , les quatre sinus peuvent être rationnels.

gonométriques particulières<sup>1</sup>. Les théorèmes de FERMAT et de FRÉNICLE relatifs à l'inexistence d'arithmotriangles pythagoriques, dont l'aire soit un carré parfait ou le double d'un tel carré, se traduisent par des équations

$$\sin 2\theta = \square ,$$

$$2\sin 2\theta = \square ,$$

impossibles si  $\text{tang } \frac{\theta}{2}$  doit être un nombre rationnel.

Ces exemples simples suffisent pour permettre d'introduire avec clarté et précision la notion d'équation arithmo-trigonométrique. Par définition, une telle équation est une équation à coefficients rationnels dans laquelle un certain nombre d'inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont engagées par leurs seuls rapports trigonométriques et dont les solutions sont telles que  $\text{tang } \frac{x_1}{2}, \text{tang } \frac{x_2}{2}, \dots, \text{tang } \frac{x_n}{2}$  soient des nombres rationnels. En d'autres termes, ces angles  $x_1, \dots, x_n$  dont la présence dans l'équation trigonométrique, au sens habi-

<sup>1</sup> Lorsque j'écrivais, en septembre 1915, les remarques sur le problème de Léonard de Pise et de Jean de Palerme, ou même les premières pages des *Notions d'arithmogéométrie*, je me trouvais dans l'absolue impossibilité de faire la moindre recherche bibliographique. C'était donc de mémoire que je citais FERMAT à l'occasion de l'impossibilité de certaines équations.

Voici maintenant les renseignements historiques nécessaires. C'est à propos du problème 20 de BACHET [trouver un arithmotriangle pythagorique dont l'aire soit égale à un nombre donné], qui se rattache lui-même à la 26<sup>e</sup> question du VI<sup>e</sup> livre de l'*Arithmétique* de DIOPHANTE, que FERMAT observa que l'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré.

Cette même proposition négative se trouve aussi dans la lettre de FERMAT à CARCAVI, d'août 1659, dont une copie par HUYGENS nous a été transmise (œuvres de Fermat, t. 2, p. 431).

FRÉNICLE (*Traité des triangles rectangles en nombres*, dans lequel plusieurs belles propriétés sont démontrées par de nouveaux principes, Paris, 1676) donne ce même théorème à la page 100.

A noter aussi une pièce du 29 décembre 1678, *Invenire triangulum in numeris cujus area sit quadratus* (*Leibnizens mathematische Schriften*, Gerhardt, III, p. 120-125) dans laquelle LEIBNIZ retrouve cette même impossibilité.

LEIBNIZ établit aussi l'impossibilité de chacune des équations

$$x^3 - x = \square ,$$

$$x^4 - y^4 = \square ;$$

la première est équivalente à

$$2 \text{ tang } \theta = \square .$$

La seconde a été considérée par FERMAT (Observations sur Diophante, VI, 26).

En ce qui concerne d'autre part l'inexistence d'arithmotriangles pythagoriques dont l'aire soit le double d'un nombre carré, c'est à la page 101 du *Traité* de FRÉNICLE qu'elle est énoncée et établie. Plus loin d'ailleurs (p. 111), FRÉNICLE indique l'impossibilité de l'équation équivalente ;

$$x^4 + y^4 = \square$$

que FERMAT a de son côté mentionnée comme impossible dans son observation VI, 32.

tuel de cette expression, en fait une équation arithmotrigonométrique, sont des angles d'une espèce toute particulière que nous connaissons bien déjà : ce sont les angles des arithmotriangles pythagoriques. Dans ces conditions, l'*Arithmotrigonométrie*, c'est-à-dire l'ensemble des propriétés de toutes les équations arithmotrigonométriques, n'offre aucune originalité, mais c'est une nouvelle forme avantageuse d'exposition des faits qui constituent la « Géométrie des triangles rectangles en nombres » telle que la concevaient DIOPHANTE, FERMAT OU FRÉNICLE.

L'arithmotrigonométrie mérite d'être étudiée ici. Ce qui fait, en effet, le plus défaut dans la théorie des nombres, ce n'est pas une théorie générale ; ce n'est pas non plus une base métaphysique solide ; ce qui fait défaut, dis-je, c'est une méthode de résolution des équations en nombres rationnels ou entiers. Toute considération qui peut conduire à des moyens pratiques de détermination des solutions est la bienvenue dans le monde mystérieux des nombres. C'est ce qui me décida à consacrer tant de pages aux présentes notions d'arithmogéométrie, dès que je reconnus que l'intuition géométrique pouvait apporter quelques perfectionnements à l'analyse diophantine. C'est encore pour une raison identique que je crois devoir donner un tel développement à ces principes d'arithmotrigonométrie.

72. — Les équations qui viennent d'être rappelées ci-dessus et qui sont étroitement liées aux deux théorèmes de FERMAT et de FRÉNICLE sur l'aire d'un arithmotriangle pythagorique sont évidemment équivalentes aux équations

$$\text{tang } \theta = \square \quad \text{et} \quad 2 \text{ tang } \theta = \square ;$$

celles-ci sont donc impossibles du point de vue arithmotrigonométrique. Cette impossibilité des équations arithmotrigonométriques

$$\text{tang } \theta = \square , \quad 2 \text{ tang } \theta = \square ,$$

et des équations qui en dérivent manifestement, telles que les équations arithmotrigonométriques

$$\sin 2\theta = \square , \quad 2 \sin 2\theta = \square ,$$

ou encore des équations algébriques remarquables qui leur sont équivalentes, présente une grande importance dans la théorie des nombres et dans l'histoire de son développement. Nombreuses sont, en effet, les propositions trouvées et retrouvées sur ces différentes équations ou sur les figures géométriques (les arithmotriangles pythagoriques notamment) qui leur sont liées. En réalité, il s'agit d'une unique propriété de la théorie des nombres. Tout d'abord, il faut observer que les équations

$$\text{tang } \theta = \square, \quad 2 \sin 2\theta = \square,$$

sont identiques entre elles et qu'il en est de même des équations :

$$2 \text{ tang } \theta = \square, \quad \sin 2\theta = \square.$$

Reste à prouver que les équations  $\sin 2\theta = \square$  et  $2 \sin 2\theta = \square$  sont équivalentes par changement de variable. Il suffit de remarquer que l'équation impossible

$$xy(x^4 - y^4) = \square,$$

considérée par EULER<sup>1</sup> devient

$$2XY(X^4 - Y^4) = \square,$$

au moyen de la transformation affine définie par les équations

$$x + y = X, \quad x - y = Y.$$

En posant alors

$$y = x \text{ tang } \frac{\theta}{2}$$

dans l'une et l'autre des deux équations impossibles équivalentes :

$$xy(x^4 - y^4) = \square, \quad 2xy(x^4 - y^4) = \square,$$

il vient :

$$\sin 2\theta = \square \quad \text{et} \quad 2 \sin 2\theta = \square.$$

L'impossibilité de l'une des équations entraîne donc celle de l'autre. Et, par suite, *il y a équivalence entre les deux propositions négatives de Fermat et de Frénicle relatives à*

<sup>1</sup> *Investigatio binorum numerorum formæ  $xy(x^4 - y^4)$ , quorum productum, sive quotus sit quadratum* (14, août 1780). *Commentationes arithmetice*, tomus posterior, pp. 438-446.

*l'inexistence d'arithmotriangles pythagoriques dont l'aire soit un carré ou le double d'un carré.*

73. — IMPOSSIBILITÉ DE  $\sin \theta = \square$  ET DE  $\cos \theta = \square$ , DE  $2\sin \theta = \square$  ET DE  $2\cos \theta = \square$ .

Je viens de dire que les équations arithmotrigonométriques

$$\text{tang } \theta = \square \quad \text{et} \quad 2 \text{ tang } \theta = \square$$

étaient séparément impossibles, comme attachées aux problèmes des arithmotriangles pythagoriques dont l'aire est un carré parfait ou le double d'un carré.

*Les quatre équations suivantes*

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \square, & 2 \sin \theta &= \square, \\ \cos \theta &= \square, & 2 \cos \theta &= \square, \end{aligned}$$

*sont de même séparément impossibles*, pour les raisons qui vont être données. Il y a lieu d'exposer tout d'abord que les deux équations de la seconde ligne, c'est-à-dire les équations en cosinus, sont respectivement équivalentes aux deux équations en sinus de la première ligne.

Des deux équations irréductibles l'une à l'autre qu'il convient de considérer maintenant, l'une d'elles  $\cos \theta = \square$  est équivalente à l'équation

$$x^4 - y^4 = \square$$

reconnue impossible par FERMAT à l'occasion du 26<sup>e</sup> problème du VI<sup>e</sup> livre de DIOPHANTE. De même, de l'impossibilité de l'équation

$$2(X^4 - Y^4) = \square,$$

établie par EULER, ou encore de celle de l'équation

$$x + \frac{1}{x} = \square,$$

considérée par LEIBNIZ<sup>1</sup>, il résulte que les équations, équi-

<sup>1</sup> Exercitium ad promovendam scientiam numerorum, *Leibnizens mathematische Schriften* Gerhardt, [2], III, 1863, p. 114-119.

Dans cette pièce, LEIBNIZ s'occupe de l'équation

$$x + \frac{a}{x} = \square,$$

qui peut être rattachée à l'étude arithmogéométrique d'une cubique, la cubique harmonique d'équation :

$$y^2 = x^3 + ax.$$



valentes par changement de variable  $\theta$ ,

$$2 \cos \theta = \square \quad \text{et} \quad 2 \sin \theta = \square ,$$

sont elles aussi impossibles.

74. — Les théorèmes qui précèdent présentent, en plus de leur intérêt historique, celui d'être fondamentaux dans l'étude d'un nombre respectable d'équations impossibles déjà connues. Il semble, en outre, que cette source féconde de propositions négatives soit encore loin d'être tarie.

Voici quelques nouveaux exemples de leur utilité incontestable.

Soit, en premier lieu, l'équation arithmotrigonométrique à deux indéterminées :

$$\sin u + \sin v = 1 ;$$

elle peut être transformée en l'équation équivalente :

$$\sin u = 2 \cos^2 \frac{v}{2} ,$$

c'est-à-dire :

$$2 \sin u = \square .$$

*Il est donc impossible de satisfaire à l'équation*

$$\sin u + \sin v = 1 ,$$

*avec des angles tels que  $\text{tang} \frac{u}{2}$  et  $\text{tang} \frac{v}{2}$  soient deux nombres rationnels.*

*Soit, en second lieu, à résoudre le problème de la détermination de quatre carrés en progression arithmétique.* M. E. HÆNTSCHEL vient de rappeler que ce problème avait été considéré, dans le cas de trois carrés, par DIOPHANTE et que le Problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise en était un cas particulier (voir paragraphe 76). J'ajouterai que ce même problème de trois carrés en progression arithmétique a été considéré aussi par FERMAT<sup>1</sup> et par FRÉNICLE<sup>2</sup> et que sa solution générale au moyen d'une représentation

<sup>1</sup> *Œuvres*, t. II, p. 65 et 234.

<sup>2</sup> *Traité des triangles rectangles en nombres...*, p. 27-28. FRÉNICLE donne la solution simple 49, 169, 289.

arithmotrigonométrique a été donnée plus haut (paragraphe 6: arithmotriangles automédiants).

Le problème de quatre carrés en progression arithmétique se traduit par les équations

$$x^2 - y^2 = y^2 - z^2 = z^2 - t^2 ,$$

qui deviennent

$$x^2 + z^2 = 2y^2 , \quad y^2 + t^2 = 2z^2 .$$

Conformément aux conclusions du paragraphe 6, je poserai donc

$$x = y(\cos \alpha - \sin \alpha) ,$$

$$z = y(\cos \alpha + \sin \alpha) ,$$

$$y = z(\cos \beta + \sin \beta) ,$$

$$t = z(\cos \beta - \sin \beta) ;$$

d'où il résulte que les angles  $\alpha$  et  $\beta$  doivent satisfaire à l'équation arithmotrigonométrique

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \beta + \sin \beta) = 1 ,$$

ou encore

$$\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 1 .$$

Celle-ci est impossible d'après le résultat qui vient d'être obtenu à l'instant. *Il est donc impossible de déterminer quatre carrés en progression arithmétique.*

### Sur certains arithmotriangles pythagoriques.

75. — L'examen du plus célèbre des arithmotriangles pythagoriques, celui des harpedonaptes égyptiens, donne l'idée de former des équations arithmotrigonométriques fort simples que je vais étudier. Les sinus et cosinus des angles aigus de ce triangle sont :

$$\frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \frac{4}{5} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} .$$

Quels sont d'une manière générale les arithmotriangles pythagoriques tels que

$$\sin \theta = \frac{1}{1 + \gamma^2} ?$$

La solution générale de cette équation arithmotrigonométrique s'obtient aisément par considération d'une arithmocubique unicursale ; on doit poser

$$\text{tang } \frac{\theta}{2} = 2\lambda^2 ,$$

et, par suite :

$$\sin \theta = \frac{1}{1 + \left( \frac{2\lambda^2 - 1}{2\lambda} \right)^2} .$$

De même l'équation

$$\cos \theta = \frac{1}{1 + \gamma^2} ,$$

qui n'est d'ailleurs pas essentiellement distincte de la précédente, se laisse résoudre en toute généralité en posant :

$$\text{tang } \frac{\theta}{2} = \frac{2\lambda^2 - 1}{2\lambda^2 + 1} .$$

Il convient de noter que cette question fournit des solutions particulières des deux équations

$$\sin \theta = \square + \square ,$$

$$\cos \theta = \square + \square ,$$

qui seront étudiées quelques pages plus loin (paragraphe 80).

75. — LE THÉORÈME DE FERMAT SUR LE NOMBRE 7. — Pour le même arithmotriangle pythagorique (3, 4, 5), on a  $\text{tang } \theta = \frac{3}{4} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$  ; cette dernière relation donne naissance à une question intéressante en elle-même, qui se rattache à une fort belle proposition de FERMAT :

*Quelle est la solution générale de l'équation*

$$\text{tang } \theta = 1 - \lambda^2$$

*en nombres rationnels  $\frac{\theta}{2}$  et  $\lambda$  ?*

Cette équation se transforme immédiatement en la suivante :

$$\frac{1 - y^2}{2y} = 1 - x^2 ,$$

représentative d'une cubique plane. Considérée comme une équation du second degré en  $y$ , cette équation dépend du point de vue arithmogéométrique d'une équation

$$x^4 - 2x^2 + 2 = \square$$

de Brahmagupta-Fermat généralisée. A cette même équation, ou d'une manière plus précise à l'équation équivalente

$$2x^4 - 2x^2 + 1 = \square ,$$

se ramène d'ailleurs le problème des arithmodistances pour l'origine et l'hyperbole équilatère  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ .

Mais ce qui est encore plus digne de retenir notre attention c'est que la question envisagée n'est point distincte d'un problème qui a son histoire : l'étude d'une propriété caractéristique du nombre entier 7. FERMAT<sup>1</sup>, en effet, a remarqué le premier que, *seul dans la suite des entiers, le nombre 7 jouit de la propriété d'être, ainsi que son carré, de la forme  $2u^2 - 1$*  ; en d'autres termes, les équations simultanées

$$2y^2 - 1 = x ,$$

$$2z^2 - 1 = x^2 ,$$

n'admettent, *en nombres entiers*, que l'unique solution :

$$x = 7 , \quad y = 2 , \quad z = 5 .$$

Je n'insisterai guère sur ce problème de FERMAT, qui se rattache encore à la théorie des arithmopoints d'une biquadratique gauche ; je me bornerai à mettre en lumière sa

<sup>1</sup> Sur ce problème de FERMAT, cf. t. 2 des *Œuvres de Fermat*, pp. 434-446 et d'autre part :

CH. HENRY, Recherches sur les manuscrits de Fermat, p. 176.

T. PÉPIN, Sur un théorème de Fermat (*Atti dell' Accademia pontificia dei nuovi Lincei*, t. 36, 1883, p. 23-33.

A. GENOCCHI, Démonstration d'un théorème de Fermat, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3<sup>e</sup> série, t. 2, 1883, p. 306-310.

liaison avec l'équation précédente ; cette liaison résultant de l'équation

$$z^2 = 2y^4 - 2y^2 + 1 ,$$

de l'une des projections de la biquadratique de l'espace. Comme nouvelle solution simple de cette équation, j'ai trouvé :

$$x = -\frac{31}{49} , \quad y = \frac{3}{7} , \quad z = \frac{41}{49} , \quad \text{tang } \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5} , \quad \text{tang } \theta = -\frac{40}{9} .$$

La solution primitive de Fermat correspond précisément à l'angle de l'arithmotriangle pythagorique de côtés 3, 4 et 5. Celle que j'en ai déduite met en évidence deux nombres,

$$\frac{31}{49} \quad \text{et} \quad \frac{41}{49} ,$$

qui ont une grande signification, si l'on se reporte à mon article sur *le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise*<sup>1</sup> ou à la lettre de M. HAENTZCHEL<sup>2</sup> sur ce même travail : la solution de DIOPHANTE, pour le problème des trois nombres carrés en progression arithmétique,

$$\overline{41}^2 - 720 = \overline{31}^2 , \quad \overline{41}^2 \quad \text{et} \quad \overline{41}^2 + 720 = \overline{49}^2 ,$$

et la solution équivalente de LÉONARD DE PISE

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2 , \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2 ,$$

pour le problème qui constituait la première des trois questions de JEAN DE PALERME, mettent précisément en évidence les trois nombres 31, 41 et 49. Simple coïncidence, mais coïncidence bien curieuse !

77. — Dans les paragraphes précédents, les relations

$$\cos \theta = \frac{4}{5} , \quad \text{tang } \theta = \frac{3}{4} ,$$

<sup>1</sup> *L'Enseignement Mathématique*, 17<sup>e</sup> année 1915, pp. 315-324.

<sup>2</sup> *Ibid.*, 19<sup>e</sup> année, 1917, pp. 199-201.

m'ont amené à étudier *séparément* les deux équations arithmotrigonométriques

$$\cos \theta = \frac{1}{1 + \square} , \quad \text{tang} = 1 - \square .$$

Il y a lieu maintenant de rechercher ceux des arithmotriangles pythagoriques qui, comme celui dont les côtés sont 3, 4 et 5, satisfait *simultanément* à ces deux équations.

Partant de la première des équations,

$$\cos \theta = \frac{1}{1 + \square} ,$$

dont la solution *générale* est donnée par les formules

$$\text{tang} \frac{\theta}{2} = \frac{2 - \lambda^2}{2 + \lambda^2} , \quad \cos \theta = \frac{4\lambda^2}{\lambda^4 + 4} ;$$

il faut évaluer à une quantité indéterminée  $1 - \mu^2$  l'expression

$$\text{tang} \theta = \frac{4 - \lambda^4}{4\lambda^2} ;$$

d'où l'équation

$$\frac{4 - \lambda^4}{4\lambda^2} = 1 - \mu^2 ;$$

elle s'écrit encore

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 - 4 = (2\mu\lambda)^2 .$$

Le problème étudié se ramène donc à l'équation

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 - 4 = \square ,$$

qui admet pour solution  $\lambda = \infty$ ,  $\lambda = 1$  (arithmotriangle 3, 4, 5),  $\lambda = \frac{5}{2}$ ; à cette dernière solution correspond un arithmotriangle pythagorique de côtés 400, 561 et 689, pour lequel

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{1 + \left(\frac{17}{20}\right)^2} = \frac{400}{689} , \\ - \text{tang} \theta &= \frac{561}{400} = 1 - \left(\frac{31}{20}\right)^2 ; \end{aligned}$$

c'est donc actuellement le supplément d'un des angles aigus de l'arithmotriangle dont la tangente trigonométrique est de la forme spécifiée dans l'énoncé du problème.

En posant alors

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 - 4 = \left(\lambda^2 - 2x + \frac{2}{3}\right)^2,$$

le problème est ramené à l'étude d'une fonction  $\mathscr{P}$  de WEIERSTRASS d'invariants

$$g_2 = -\frac{8}{3} \quad \text{et} \quad g_3 = -\frac{80}{27}.$$

### Arithmotriangles pythagoriques dont les trois côtés sont sommes de deux carrés.

78. — LE THÉORÈME DE FERMAT. — L'importance des nombres sommes de deux carrés<sup>1</sup> est assez grande; elle est surtout due aux belles recherches qui ont été faites autour d'un théorème célèbre de *Fermat*<sup>2</sup>. C'est à l'occasion du problème de la détermination du moindre nombre qui soit autant de fois qu'on voudra et non plus la somme de deux carrés, problème proposé par FRÉNICLE, dans une lettre adressée le 6 septembre 1641 à FERMAT, que ce dernier énonça le théorème suivant : *Si un nombre p compris dans la forme 4n + 1 est premier ou composé de facteurs premiers de cette forme, p est la somme de deux carrés.* En remarquant que les facteurs puissances de 2 n'altèrent point cette propriété, en vertu de l'identité

$$2(b^2 + c^2) = (b + c)^2 + (b - c)^2,$$

il est possible de présenter ce théorème de FERMAT sous la forme générale et précise qui suit :

<sup>1</sup> Initialement considérés par DIOPHANTE (II, 8, 9 et 10), puis par VIÈTE (Zeteticorum libri, IV, 2, 3).

<sup>2</sup> *Œuvres de Fermat*, t. I, p. 293; t. II, p. 213, 221, 403 et 432; t. III, p. 243, 315. — S. RÉALIS : *Scolies pour un théorème de Fermat*, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3), t. 4, 1885, p. 367-372. — Le théorème de FERMAT a été démontré par EULER (*Nouveaux commentaires de Pétersbourg*, t. IV, p. 3 et t. V, p. 3), LEGENDRE et SMITH. Edouard LUCAS en a donné une très curieuse démonstration géométrique par les *satins carrés*.

*Si un nombre entier n'a que des facteurs  $2^n$  ou premiers de la forme  $4k + 1$ , il est la somme de deux carrés.*

Le théorème s'étend immédiatement aux nombres rationnels ; en remarquant avec EULER que *les diviseurs d'un nombre somme de deux carrés jouissent de la même propriété*, et en remplaçant l'équation

$$\frac{A}{B} = \square + \square ,$$

par l'équation équivalente

$$AB = \square + \square ,$$

on obtient le théorème général suivant :

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier ou fractionnaire soit somme de deux carrés est que cet entier ou les deux termes entiers de la fraction n'aient que des facteurs des formes  $2^n$  et  $4k + 1$ .*

**79. — LE PROBLÈME DES ARITHMOTRIANGLES PYTHAGORIQUES A COTÉS SOMMES DE DEUX CARRÉS. —** Les équations arithmotrigonométriques

$$\sin \theta = \square , \quad \cos \theta = \square , \quad \text{tang } \theta = \square ,$$

étant toutes trois séparément impossibles, *il n'existe aucun arithmotriangle pythagorique ayant plus d'un côté carré parfait.* Comme, parmi les nombres non carrés, les plus simples sous le point de vue de la constitution par sommes de carrés, sont les sommes de deux carrés, je me suis naturellement posé la question suivante : *Existe-t-il des arithmotriangles pythagoriques dont les trois côtés sont simultanément sommes de deux carrés ?*

La réponse à cette question est affirmative : il existe une infinité de solutions, telles que celle qui correspond aux trois côtés

$$\begin{aligned} 9 &= 3^2 , \\ 40 &= 2^2 + 6^2 . \\ 41 &= 4^2 + 5^2 . \end{aligned}$$

Dans cet exemple, la plus petite des cathètes est mesurée par le nombre 9. D'une manière générale, puisque l'hypo-



ténuse d'un arithmotriangle pythagorique ne peut jamais être mesurée par un nombre multiple de 3, puisque, au contraire, l'un des côtés est toujours mesuré par un multiple de 3<sup>1</sup>, et puisque, enfin, ce nombre 3 ne saurait être somme de deux carrés, comme étant de la forme  $4k - 1$ , une première propriété des arithmotriangles pythagoriques spécialement étudiés ici est que :

*Dans tout arithmotriangle pythagorique dont les trois côtés sont simultanément sommes de deux carrés, l'une des deux cathètes est mesurée par un nombre divisible par 9 (ou par une puissance paire de 3). Il en est de même des mesures de la hauteur relative à l'hypoténuse et de l'aire du triangle.*

D'autre part, comme conséquences de la propriété d'invariance par multiplication entre eux des nombres sommes de deux carrés, il est évident que :

*L'aire (qui ne peut jamais être un carré parfait) et la hauteur relative à l'hypoténuse d'un arithmotriangle pythagorique dont les côtés sont tous trois sommes de deux carrés sont aussi mesurées par des nombres de cette nature.*

Ces propriétés générales établies, j'aborde la recherche même de ces triangles.

80. — L'ÉQUATION  $\cos \theta = \square + \square$ . Soit  $\text{tang} \frac{\theta}{2} = x$ ; puisque le dénominateur  $1 + x^2$  de la fraction rationnelle exprimant  $\cos \theta$ , en fonction de  $x$ , est une somme de deux carrés, il faut et il suffit qu'il en soit de même du numérateur  $1 - x^2$ . Posant

$$1 - x^2 = y^2 + z^2,$$

on ramène le problème à l'étude de l'arithmosphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

si  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont alors les coordonnées d'un arithmopoint quelconque de cette arithmosphère, l'expression de  $\cos \theta$  est :

$$\cos \theta = \left( \frac{xz + y}{1 + x^2} \right)^2 + \left( \frac{yz - x}{1 + x^2} \right)^2.$$

<sup>1</sup> Ces deux théorèmes sont dus à FRÉNICLE (*loc. cit.*, p. 77 et 76 respectivement).

Telle est l'élégante solution du problème. Il suffit alors d'exprimer, conformément au paragraphe 8, les trois coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  en fonction de deux paramètres pour avoir une expression de  $\cos \theta$ .

L'équation  $\sin \theta = \square + \square$  n'est pas différente de la précédente. Pour la résoudre directement, il suffit d'observer que la solution générale consiste à poser :

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \alpha^2 + \beta^2 .$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant deux nombres rationnels quelconques.

81. — Pour revenir au problème posé, il suffit d'observer que, par similitude, on peut rendre l'hypoténuse carré parfait ou somme de deux carrés parfaits. Le problème se traduit donc par les deux équations simultanées :

$$\sin \theta = \square + \square \quad \text{et} \quad \cos \theta = \square + \square .$$

La première de ces équations est résolue par

$$t = \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \alpha^2 + \beta^2 ;$$

la seconde équation donne alors la condition

$$1 - t^2 = \square + \square ,$$

ou

$$1 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 + \gamma^2 + \delta^2 .$$

Nous devons ainsi considérer l'arithmosphère de rayon rationnel et choisir parmi son infinité double d'arithmopoints ceux qui ont une coordonnée somme de deux carrés. Les formules de représentation impropre étant

$$x = \frac{(1 - u^2)(1 - v^2)}{(1 + u^2)(1 + v^2)} , \quad y = 2v \cdot \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)(1 + v^2)} , \quad z = \frac{2u}{1 + u^2} ,$$

un choix est tout indiqué, en raison de la grande simplicité de l'expression de  $z$  ; il suffira de prendre pour  $u$  une somme de deux carrés. D'où le théorème définitif :

*Une famille d'arithmotriangles pythagoriques dont les trois*

côtés sont simultanément sommes de deux carrés est caractérisée et définie par l'équation

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \frac{2(\lambda^2 + \mu^2)}{1 + (\lambda^2 + \mu^2)^2},$$

qui exprime la tangente trigonométrique de l'un des angles aigus en fonction de deux nombres rationnels arbitraires  $\lambda$  et  $\mu$ .

Pour  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ , on obtient  $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$  et, par suite,

$$\sin \theta = \frac{40}{41} = \left(\frac{32}{41}\right)^2 + \left(\frac{24}{41}\right)^2,$$

$$\cos \theta = \frac{9}{41} = \left(\frac{12}{41}\right)^2 + \left(\frac{15}{41}\right)^2,$$

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{40}{9} = 2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2;$$

cette solution correspond précisément au triangle dont les côtés ont été initialement donnés à titre d'exemple.

Pour  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$ , il vient de même  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{5}{13}$ ,  $\sin \theta = \frac{65}{97}$ ,  $\cos \theta = \frac{72}{97}$ ,  $\operatorname{tg} \theta = \frac{65}{72}$ ; l'arithmotriangle pythagorique correspondant a pour côtés

$$65 = 1^2 + 8^2,$$

$$72 = 6^2 + 6^2,$$

$$97 = 4^2 + 9^2.$$

Une autre famille étendue de solutions particulières est donnée par l'expression de l'ordonnée  $y$

$$y = 2\nu \cdot \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)(1 + \nu^2)};$$

il suffit manifestement de poser

$$\nu(1 - u^2) = \lambda^2 + \mu^2$$

pour obtenir (en remplaçant  $u$  par  $\nu$  pour raison d'élégance dans l'aspect de la formule)

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \frac{2(\lambda^2 + \mu^2)}{(1 + \nu^2) \left[ 1 + \left( \frac{\lambda^2 + \mu^2}{1 - \nu^2} \right)^2 \right]}$$

une expression de  $\text{tang} \frac{\theta}{2}$  en fonction de trois indéterminées rationnelles  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$ .

Pour  $\nu = 0$  cette famille se réduit à la précédente. Nous aurons donc obtenu une solution particulière triplement indéterminée.

Dans ces conditions, l'étude du problème dans toute sa généralité est abordable. Pour obtenir la solution générale, il est indispensable d'avoir recours aux formules

$$x = \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \quad y = \frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \quad z = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\xi^2 + \eta^2 + 1},$$

de la représentation propre de l'arithmosphère de rayon rationnel; la question se traduit par une équation

$$(x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2) + x^2 + y^2 - \xi^2 - \eta^2 + 1 = 0$$

du quatrième degré en  $x$ ,  $y$ ,  $\xi$  et  $\eta$ . Pour éviter l'introduction de notions d'hypergéométrie, il suffit de prendre l'une de ces indéterminées  $\eta$  pour paramètre et les trois autres pour coordonnées dans l'espace à trois dimensions  $(x, y, \xi)$ ; le problème se rattache donc à l'étude arithmotrigonométrique d'un faisceau de surfaces du quatrième degré.

Il est aussi avantageux de ramener cette même question à l'étude d'une  $\infty^2$  de quartiques planes<sup>1</sup>. Si  $y$  et  $\eta$  sont pris

<sup>1</sup> Cette dernière considération peut être présentée sous une autre forme. La question est équivalente à la recherche de deux des arithmopoints d'une arithmo-hyperbole équilatère, représentée par l'équation

$$xy = x + y + 1,$$

qui ont des coordonnées simultanément sommes de deux carrés telles que les suivantes :

$$x = 9, \quad y = \frac{5}{4},$$

$$x = 17, \quad y = \frac{9}{8},$$

$$x = 129, \quad y = \frac{65}{4}, \quad \text{etc.}$$

L'arithmogéométrie apparaît de plus en plus comme capable de provoquer des recherches sur des questions originales ressortissant de la théorie des nombres. Ici, par exemple, se pose une question, que je n'ai pas étudiée mais qui, de prime abord, semble avoir quelque intérêt: *Etant donnée une équation  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  à deux ou plusieurs indéterminées, rechercher celles de ses solutions qui sont formées par des nombres  $x_1 \dots x_n$  tous sommes de deux carrés.* C'est une sorte d'extension de l'équation

$$Ax^4 + Bx^2 + C = y^2,$$

qui traduit le problème de la détermination des arithmopoints d'une parabole  $y = Ax^2 + Bx + C$  à coordonnées exprimées par deux carrés parfaits, et d'une manière générale des équations  $f(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) = 0$ .

pour paramètres, et si  $x$  et  $\xi$  sont pris pour coordonnées dans un certain plan, cette quartique est la projection d'une biquadratique gauche, intersection du parabolôide, représenté dans un espace  $(x, \xi, \zeta)$  par l'équation

$$x\xi = \zeta,$$

et d'une quadrique rapportée à ses axes :

$$(\eta^2 + 1)x^2 + (y^2 - 1)\xi^2 + \zeta^2 = \eta^2 - y^2 - 1 - y^2\eta^2.$$

82. — L'ÉQUATION  $\text{tang } \theta = \square + \square$ . Avant de passer à une nouvelle question, quelques lignes s'imposent au sujet de l'équation  $\text{tang } \theta = \square + \square$ , ou de l'équation équivalente  $\text{cotang } \theta = \square + \square$ .

Cette équation arithmotrigonométrique se traduit algébriquement sous la forme

$$\frac{x^2 - 1}{2x} = \square + \square,$$

c'est-à-dire encore :

$$x^2 - 1 = x(y^2 + z^2);$$

cette dernière équation représente, dans l'espace ordinaire, une surface du troisième degré (voir paragraphe 36) sur laquelle existent tous les arithmopoints qui correspondent aux solutions des équations *simultanées*  $\sin \theta = \square + \square$  et  $\cos \theta = \square + \square$ . De sorte que la solution de l'équation  $\text{tang } \theta = \square + \square$  dépend de celle du problème qui vient d'être traité dans les paragraphes précédents.

### L'arithmotrigonométrie et les arithmotriangles héroniens.

83. — APPLICATION DE LA NOTION D'ARITHMODISTANCE. J'ai souvent utilisé dans les considérations antérieures la notion d'arithmodistance et introduit le *problème des arithmodistances*, soit pour créer de nouveaux types d'équations indéterminées, soit pour rattacher à une idée générale certaines équations particulières.

En se bornant au cas de l'arithmocourbe plane (C), dont

l'arithmopoint M est repéré par ses coordonnées  $x$  et  $y$  et d'un arithmopoint fixe A de coordonnées  $a$ ,  $b$ , le problème des arithmodistances pour cet arithmopoint A et l'arithmocourbe (C) est résolu par l'équation générale (paragraphe 17)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \square .$$

Pour les développements qui vont suivre et qui ont toujours pour objet la constitution de l'arithmotrigonométrie, il est avantageux d'observer que cette même équation est entièrement équivalente à une équation arithmotrigonométrique d'une espèce spéciale, que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{y - b}{x - a} = \text{tang } \theta ,$$

dans laquelle  $\theta$  est un azimut tel que  $\text{tang } \frac{\theta}{2}$  est un nombre rationnel. Cette même équation a d'ailleurs une signification précise, puisqu'elle se présente tout naturellement lorsque le problème des arithmodistances est posé sous la forme suivante.

*Soient un arithmopoint connu A et une arithmocourbe (C) dont l'arithmopoint courant M est repéré par un paramètre rationnel  $t$ . Quels sont ceux des arithmopoints M de l'arithmocourbe imposée (C) qui définissent avec l'arithmopoint donné A des droites arithmodirigées ?*

Cette remarque est féconde en ce sens qu'un grand nombre de cas spéciaux du problème des arithmodistances se laissent traduire par des équations arithmotrigonométriques souvent simples et, souvent aussi, de formes remarquables. Il en est notamment ainsi lorsque la courbe imposée (C) est paramétriquement représentée par l'intermédiaire de fonctions trigonométriques, comme pour l'ellipse.

Pour l'ellipse, dis-je, dans le cas de la représentation au moyen des demi-axes  $\alpha$  et  $\beta$  supposés rationnels et de l'anomalie excentrique  $\varphi$ . supposée telle que  $\text{tang } \frac{\varphi}{2}$  soit un paramètre rationnel, il résulte des expressions des coordonnées

$$x = \alpha \cos \varphi , \quad y = \beta \sin \varphi ,$$

que le problème des arithmodistances pour cette arithmo-ellipse et un arithmopoint général de son plan se traduit par l'équation

$$\frac{\beta \sin \varphi - b}{\alpha \cos \varphi - a} = \operatorname{tang} \theta ;$$

trois paramètres arbitraires, les rapports des quatre nombres rationnels  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , assurent à cette équation arithmo-trigonométrique une assez grande généralité. Elle contient en effet comme cas particulier deux de ceux qui vont faire l'objet de considérations spéciales (paragraphe 86) et auxquelles conduit la détermination de certaines espèces d'arithmotriangles héroniens :

$$\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tang} \theta} = \operatorname{const.} .$$

$$\frac{\operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang} \theta} = \operatorname{const.} .$$

84. — Le problème des triangles télémétriques m'a tout naturellement amené aux paragraphes 67 et 68 à rechercher s'il existait ou non des arithmotriangles héroniens dont deux côtés soient dans un rapport donné *a priori*.

Proposons-nous d'une manière générale de rechercher tous les arithmotriangles héroniens dont les côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  satisfont à une condition donnée :

$$f(a, b, c) = 0 .$$

D'après les formules du paragraphe 10, il faut donc déterminer trois nombres rationnels  $R$ ,  $x$ , et  $y$ , satisfaisant aux inégalités

$$R > 0 , \quad \frac{1}{\sqrt{3}} > z > 0 , \quad \sqrt{1 + z^2} - z > y > z ,$$

et reliés entre eux par la relation :

$$f \left[ 4R \frac{(y+z)(1-yz)}{(1+y^2)(1+z^2)} , 4R \cdot \frac{y}{1+y^2} , 4R \cdot \frac{z}{1+z^2} \right] = 0 .$$

Cette dernière équation représente, dans un système de coordonnées  $y$ ,  $z$  et  $R$ , une certaine surface. D'où il résulte

que le *problème considéré de détermination d'arithmotriangles héroniens est équivalent à l'étude arithmogéométrique d'une surface de l'espace ordinaire.*

Il n'est guère possible de s'étendre davantage sur un problème aussi général; pour aller plus loin, il est nécessaire de le particulariser.

Parmi les cas particuliers remarquables, il convient de signaler en première ligne celui d'une condition homogène. Lorsque la relation imposée

$$f(a, b, c) = 0$$

est homogène, le problème général, susceptible d'être associé à l'étude d'une surface, dégénère en un *problème d'arithmogéométrie autour d'une courbe plane.* Les coordonnées d'un certain plan étant  $x$  et  $z$ , cette courbe est celle que représente l'équation

$$f[(y+z)(1-yz), y(1+z^2), z(1+y^2)] = 0.$$

85. — Dans ce même cas d'une relation homogène entre les côtés de l'arithmotriangle héronien, cette relation imposée peut être écrite sous la forme :

$$f(\sin A, \sin B, \sin C) = 0;$$

des cas particuliers intéressants s'obtiennent en se bornant à des équations entre  $\sin B$  et  $\sin C$ , par exemple.

C'est ainsi que, si la condition imposée est une relation homographique entre  $\sin B$  et  $\sin C$ , soit

$$\alpha \sin B \cdot \sin C + 2\beta \sin B + 2\gamma \sin C + 4\delta = 0,$$

cette condition se traduit par l'équation

$$\alpha yz + \beta y(1+z^2) + \gamma z(1+y^2) + \delta(1+y^2)(1+z^2) = 0,$$

représentative d'une quartique plane. Cette courbe est la projection sur le plan  $Oyz$  de la biquadratique gauche, intersection du parabolôide hyperbolique d'équation

$$yz - x = 0,$$

avec une quadrique d'équation :

$$\delta(x^2 + y^2 + z^2) + x(\gamma y + \beta z) + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$



Le cas ( $\alpha = 0, \delta = 0$ ), c'est-à-dire celui de l'équation arithmotrigonométrique

$$\frac{\sin C}{\sin B} = n ,$$

est précisément celui qui a fait l'objet des considérations du paragraphe 68. Le problème dépend de l'équation

$$y^4 + 2ky^2 + 1 = \square ,$$

étudiée par L. EULER, A. GENOCCHI et Ed. LUCAS (cf. § 51).

86. — Soit une équation du type précédent

$$y^4 + 2ky^2 + 1 = \square ;$$

elle peut être mise sous les deux formes suivantes :

$$(y^2 + 1)^2 + 2(k - 1)y^2 = \square ,$$

$$(y^2 - 1)^2 + 2(k + 1)y^2 = \square ;$$

dans le cas où  $2(k - 1)$  est un carré parfait, soit

$$2(k - 1) = 4\omega^2 ,$$

l'expression

$$\frac{2\omega y}{1 + y^2}$$

peut être égalée à la tangente d'un arc  $\theta$  tel que  $\text{tang} \frac{\theta}{2}$  soit rationnel. Si donc on pose

$$y = \text{tang} \frac{\Theta}{2} ,$$

on a

$$\omega \cdot \sin \Theta = \text{tang} \theta ;$$

réciproquement, l'équation précédente dans laquelle  $\omega$  est un nombre rationnel et  $\Theta$  et  $\theta$  deux arcs tels que  $\text{tang} \frac{\Theta}{2}$  et  $\text{tang} \frac{\theta}{2}$  soient rationnels est réductible à une équation

$$y^4 + 2ky^2 + 1 = \square .$$

Si d'autre part  $2(1 - k)$  est un carré, soit  $4\omega^2$ , l'expression  $\frac{2\omega y}{1 + y^2}$  peut être égalée à un sinus d'un arc  $\theta$ ; on est ainsi

conduit à une équation

$$\omega \cdot \sin \Theta = \sin \theta ;$$

c'est précisément ce qui se produit au paragraphe 68.

Considérons de même l'équation

$$(y^2 - 4)^2 + 2(k + 1)y^2 = \square .$$

Lorsque  $2(k + 1)$  est de la forme  $-4\omega^2$ , l'expression  $\frac{2\omega y}{1 - y^2}$ , c'est-à-dire  $\omega \operatorname{tang} \Theta$  est égale à un sinus et l'on retombe sur une équation

$$\omega \operatorname{tang} \Theta = \sin \theta$$

déjà traitée.

Enfin lorsque  $2(k + 1)$  est un carré  $4\omega^2$ , l'équation n'est autre que

$$\omega \operatorname{tang} \Theta = \operatorname{tang} \theta .$$

Celle-ci n'est d'ailleurs pas essentiellement distincte de l'équation

$$\omega \sin \Theta = \sin \theta ;$$

cette dernière équation devient, en effet,

$$\omega' \operatorname{tang} \Theta' = \operatorname{tang} \theta' ,$$

en posant

$$\Theta' = \frac{\Theta + \theta}{2} , \quad \theta' = \frac{\Theta - \theta}{2} , \quad \omega' = \frac{1 - \omega}{1 + \omega} .$$

En résumé, *les équations arithmotrigonométriques*

$$\frac{\sin \Theta}{\sin \theta} = n ,$$

$$\frac{\sin \Theta}{\operatorname{tang} \theta} = n ,$$

$$\frac{\operatorname{tang} \Theta}{\operatorname{tang} \theta} = n ,$$

*dans lesquelles  $n$ ,  $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$  et  $\operatorname{tang} \frac{\Theta}{2}$  sont trois nombres rationnels dont le premier est imposé, sont respectivement équivalentes à trois équations eulériennes du type*

$$x^4 + 2kx^2 + 1 = \square .$$

87. — Parmi les équations de cette espèce se trouve l'équation

$$x^4 + 14x^2 + 1 = \square$$

qui mérite une mention spéciale, car elle intervient dans l'étude du problème des arithmotriangles télémétriques.

Reprenons, en effet, l'équation trouvée au paragraphe 67 de la quartique plane dont l'étude arithmotrigonométrique est équivalente à l'étude des arithmotriangles télémétriques généraux :

$$(x^2 - y^2)(x^2 - 2y^2) = x^2 + 2y^2 .$$

La condition de rationalité en  $x^2$  de cette équation bicarrée en  $x$  est précisément exprimée par l'équation

$$y^4 + 14y^2 + 1 = \square ;$$

en l'écrivant sous la forme

$$(y^2 - 1)^2 + (4y)^2 = \square ,$$

et en posant  $y = \text{tang} \frac{\Theta}{2}$ , elle équivaut à l'équation arithmotrigonométrique

$$\text{tang} \theta = 2 \text{tang} \Theta .$$

L'équation considérée admet des solutions banales évidentes :  $y = 0, 1$  et  $l'∞$  ; elle n'admet pas d'autre solution rationnelle. L'impossibilité de cette équation particulière a été primitivement établie par L. EULER en 1780<sup>1</sup>. Par suite,

*Il n'existe aucun triangle télémétrique dont les trois côtés soient rationnels.*

88. — Je profite de l'occasion qui m'est offerte pour indiquer une transformation intéressante de ce type d'équation. L. EULER considère l'équation particulière

$$x^4 + 14x^2 + 1 = \square ,$$

<sup>1</sup> Cette impossibilité de l'équation

$$x^4 + 14x^2 + 1 = \square$$

est établie à la fin de la pièce *De binis formulis speciei  $x^2 + my^2$  et  $x^2 + ny^2$  inter se concordibus et discordibus*, datée de 1780 [*Commentationes arithmeticae*, t. 2, pp. 406-413] et rappelée (p. 492) au début de celles des deux pièces du même titre : *De casibus quibus hanc formulam  $x^4 + kx^2y^2 + y^4$  ad quadratum reducere licet* qui est datée de 1782 (t. 2, p. 492).

L'impossibilité de cette équation particulière est rappelée dans le travail déjà cité de A. Genocchi (*C. R.*, t. 78, p. 435).

en même temps que l'équation également impossible

$$x^4 - x^2 + 1 = \square ;$$

toutes deux se présentent, en effet, suivant l'ordre que l'on adopte dans l'étude du système des deux équations

$$x^2 + y^2 = \square \quad x^2 + 4y^2 = \square .$$

EULER établit l'impossibilité de toutes ces équations ainsi que de celles qui peuvent en être déduites par transformation : « Denique etiam formulæ biquadraticæ, quæ se obtulerunt, sunt impossibiles. Ita cum ex theoremate sit «  $p^4 - p^2q^2 + q^4 = \square$  impossibilis, impossibilis quoque « erit hæc forma  $p^4 + 14p^2q^2 + q^4 = \square$ , hincque etiam « plures aliæ formulæ, quæ per transformationem hinc formari possunt. » Il ne semble point qu'il ait aperçu la possibilité de transformer l'une en l'autre par une transformation simple ces deux équations

$$x^4 + 14x^2 + 1 = \square . \quad x^4 - x^2 + 1 = \square .$$

Cette transformation n'est autre que la transformation homographique

$$x = \frac{1 - x'}{1 + x'} .$$

Soit généralement, en effet, une équation

$$x^4 + 2kx^2 + 1 = \square ;$$

la transformation ci-dessus lui fait correspondre l'équation

$$x^4 + 2k'x^2 + 1 = \square ,$$

et la correspondance est réciproque. Entre les nombres  $k$  et  $k'$  existe la correspondance involutive

$$(k + 1)(k' + 1) \mp 4 = 0 ;$$

tout particulièrement pour  $k = +7$ , on obtient  $k' = -\frac{1}{2}$ .

89. — ARITHMOTRIANGLES HÉRONIENS DONT LA SOMME DES CARRÉS DE DEUX COTÉS EST UN CARRÉ. — Il s'agit de rechercher tous les arithmotriangles héroniens, généralisant les

arithmotriangles pythagoriques, tels que la somme des carrés de deux côtés,  $b$  et  $c$  par exemple, soit un carré :

$$b^2 + c^2 = \square .$$

On a donc

$$\sin^2 B + \sin^2 C = \square .$$

c'est-à-dire encore

$$\left(\frac{1+y^2}{y}\right)^2 + \left(\frac{1+z^2}{z}\right)^2 = \square .$$

Cette dernière équation a été rencontrée par L. EULER<sup>1</sup> qui en a donné, en 1773, la solution

$$y = \frac{4t}{t^2 - 1} , \quad z = \frac{3t^2 + 1}{t(t^2 + 3)} ,$$

en fonction d'un paramètre rationnel  $t$  quelconque.

90. — Qu'il me soit permis, à ce sujet, de placer ici quelques observations sur les *Commentationes arithmeticae*.

Déjà en maintes occasions, j'ai mentionné le nom d'EULER parmi ceux des géomètres qui ont étudié certaines figures simples sous le point de vue arithmogéométrique. Les questions d'analyse indéterminée traitées dans les admirables *Commentationes arithmeticae*, dont la lecture est facile et captivante, sont de deux espèces. Les unes sont de nature géométrique : triangles héroniens, triangles à médianes rationnelles, triangles rectangles dont l'hypoténuse est un carré parfait ainsi que la somme des cathètes, parallélépipèdes rectangles dont les arêtes et les diagonales des faces sont commensurables, etc.

A côté de ces questions essentiellement arithmogéométriques, résolues totalement ou partiellement par des considérations purement arithmétiques, se placent des questions de pure analyse indéterminée, telles que l'étude de l'équation

$$x^4 + kx^2 + 1 = \square ,$$

dont il a été question ci-dessus (aux paragraphes 51 et 71 notamment). Rien dans l'œuvre d'EULER ne permet de détermi-

<sup>1</sup> *Commentationes arithmeticae*, *Miscellanea analytica*, 15 novembre 1773, tomus posterior, Petropoli, 1849, pp. 44-52. Le problème ci-dessus considéré est traité aux pp. 46-47.

ner l'origine de ces questions : les a-t-il considérées comme de simples généralisations de l'équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT

$$ax^2 + bx + c = \square ,$$

ou les a-t-il rencontrées à l'occasion d'études relatives à des problèmes géométriques du genre précédent, problèmes auxquels il n'a pas cru devoir faire allusion dans sa rédaction définitive ? Il semble difficile de solutionner cette question d'origine, car il insiste fréquemment sur le caractère analytique de ces recherches qui *constituent un prolongement de l'analyse diophantine*.

Il semble pourtant difficile d'attribuer une origine de ce genre à des équations telles que celle,

$$\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y^2 + 1}{y}\right)^2 = \square ,$$

de la pièce du 15 novembre 1773. Elle est peut-être née de l'étude d'une figure géométrique dont il ne reste pas trace dans le mémoire d'EULER. Il est fort possible que la généralisation des triangles pythagoriques dont je viens de rattacher l'étude à cette curieuse équation ait été envisagée par le même géomètre qui consacrait plusieurs mémoires aux équations

$$b^2 + c^2 - 2a^2 = \square$$

des arithmotriangles à médianes rationnelles (voir § 98) et aux équations

$$b^2 + c^2 - a^2 = \square , \text{ etc.}$$

(voir § 100) dont la liaison avec les précédentes est évidente. Il en est de même des équations du système

$$x^2 + y^2 = \square .$$

$$x^2 + 4y^2 = \square ,$$

dont il vient d'être question à propos des arithmotriangles télémétriques (voir § 88) et qui sont manifestement celles qui traduisent analytiquement le problème des arithmotriangles pythagoriques à deux médianes rationnelles (voir § 99).

### Le problème des arithmodistances pour un arithmotriangle donné.

91. — Les côtés d'un triangle étant mesurés rationnellement, s'il existe dans le plan du triangle un seul point dont les trois distances aux côtés soient rationnelles, ce triangle est de toute nécessité un arithmotriangle héronien.

Si, conformément aux conclusions du paragraphe 20, l'arithmotriangle héronien est défini par trois arithmodirigées quelconques du plan, tout arithmopoint du plan est alors à des distances rationnelles des côtés du triangle.

Voilà donc un problème d'arithmogéométrie simplement et complètement résolu. Il y a lieu de se poser d'une manière analogue le problème suivant que j'appellerai par la suite *problème des arithmodistances pour un arithmotriangle* :

*Etant donné un arithmotriangle quelconque, c'est-à-dire un triangle à côtés commensurables, déterminer les points de son plan qui sont situés à des distances rationnelles de ses trois sommets.*

92. — LE QUADRILATÈRE RATIONNEL. — Ce problème important doit être rattaché au problème du *quadrilatère rationnel*, c'est-à-dire du quadrilatère à côtés et à diagonales commensurables. Dans le cas actuel, trois sommets du quadrilatère rationnel sont imposés.

Le premier quadrilatère rationnel considéré fut celui de *Brahmagupta* (paragraphe 30) ; ce quadrilatère rationnel est inscriptible dans un cercle.

L'étude du quadrilatère rationnel le plus général semble avoir été faite pour la première fois en 1848, par E.-E. KUMMER<sup>1</sup> qui a démontré que :

*Dans tout quadrilatère à côtés et à diagonales rationnels les diagonales se coupent en parties rationnelles.*

Ce résultat essentiel pour la théorie des quadrilatères ra-

<sup>1</sup> E.-E. KUMMER. Ueber die Vierecke deren Seiten und Diagonalen rational sind, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), 37<sup>e</sup> B., 1848, S. 1-20.

tionnels avait d'ailleurs été déjà signalé par L.-N.-M. CARNOT<sup>1</sup> dès 1803 ; le géomètre français forme les expressions des segments des diagonales et il insiste sur le fait que chacun des quatre segments des diagonales s'obtient par une équation du premier degré. Il en est de même, ajoute Carnot, des segments formés sur les côtés par les prolongements d'autres côtés.

La théorie des quadrilatères rationnels, fondée sur le théorème précédent, a été ramenée par KUMMER à l'étude d'une équation

$$[\alpha x^2 - 2c(\alpha + \gamma)x - \alpha k^2]^2 + 4k^2\gamma^2 x^2 = \square ,$$

dans laquelle  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $c$ ,  $k$  sont des constantes, et par suite aux fonctions elliptiques, comme application d'un mémoire de JACOBI<sup>2</sup> sur les équations

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = \square .$$

93. — Ces résultats relatifs aux quadrilatères rationnels rappelés, je reprends l'étude du problème des arithmodistances aux sommets d'un quadrilatère et vais réduire ce problème aux fonctions elliptiques par une voie plus géométrique.

Si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les côtés de l'arithmotriangle ABC et si  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les distances aux trois sommets respectifs A, B et C d'un point M quelconque du plan, ces six longueurs sont liées par la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 & x^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 & y^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 & z^2 \\ 1 & x^2 & y^2 & z^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ou encore après développement du déterminant :

$$\begin{aligned} & a^2(x^2 - y^2)(x^2 - z^2) + b^2(y^2 - z^2)(y^2 - x^2) + c^2(z^2 - x^2)(z^2 - y^2) \\ & + a^2(a^2 - b^2 - c^2)x^2 + b^2(b^2 - c^2 - a^2)y^2 + c^2(c^2 - a^2 - b^2)z^2 \\ & + a^2b^2c^2 = 0 . \end{aligned}$$

<sup>1</sup> *Géométrie de position*, Paris, 1803, p. 391-393 (non citée par KUMMER).

<sup>2</sup> JACOBI. De usu theoriæ integralium ellipticorum et abelianorum in *Analysi Diophantea*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 13<sup>e</sup> B, 1835, S. 353-355.



Cette condition, nécessaire et suffisante pour que quatre points dont les distances mutuelles sont données, soient situés dans un même plan<sup>1</sup>, montre que le problème posé est équivalent à l'étude arithmogéométrique d'une surface du quatrième degré.

Avant de pousser plus loin l'étude du problème dans toute sa généralité, il convient de mettre en évidence les solutions particulières dont la connaissance sera ensuite précieuse, puisqu'elle assurera aux biquadratiques gauches génératrices de cette surface l'existence d'arithmopoints particuliers.

94. — Le problème des arithmodistances pour un arithmo-triangle quelconque admet une infinité de solutions particulières qu'il est possible de déterminer simplement. *Ce problème est, en effet, résoluble dans le cas le plus général sur le périmètre du triangle.*

Soient  $a, b, c$  les côtés du triangle ABC et un point M de l'un des côtés, BC par exemple, situé à des distances rationnelles

$$\begin{aligned} \text{BM} &= \lambda, \\ \text{CM} &= \lambda - a, \end{aligned}$$

des sommets;  $\lambda$  étant un nombre algébrique quelconque, tous les cas possibles de figure correspondent à ces formules. Le point M sera une solution particulière du problème des arithmodistances si sa distance au point A est rationnelle; celle-ci est fournie par la relation de Stewart :

$$c^2 \cdot \text{MC} + b^2 \cdot \text{BM} - a \cdot \overline{\text{AM}}^2 = a \cdot \text{BM} \cdot \text{CM}$$

qui se traduit algébriquement par l'équation

$$b^2 \lambda + c^2 (a - \lambda) - a \lambda (a - \lambda) = a \cdot \overline{\text{AM}}^2,$$

c'est-à-dire une équation de Brahmagupta-Fermat du second degré :

$$c^2 + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{a} \lambda + \lambda^2 = \overline{\text{AM}}^2.$$

<sup>1</sup> Cette relation doit être connue depuis fort longtemps. Elle est formée dans la *Géométrie de position* de CARNOT (1803, p. 387-389), rappelée par FÖRSTEMANN (Umkehrung des Ptolomäischen Satzes, *Journal de Crelle*, 13<sup>e</sup> tome, 1835, p. 233-236) d'après l'édition allemande de SCHUMACKER de l'ouvrage précédent et formée encore par SALMON (*Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, 1882, p. 50-51).

Elle admet trois solutions  $\lambda = \infty$ ,  $\lambda = 0$  (point B),  $\lambda = a$  (point C) connues *a priori*; elle est donc résoluble et sa solution générale en fonction d'un paramètre est :

$$\lambda = \frac{c^2 - t^2}{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{a} + 2t}.$$

95. — *Le problème des arithmodistances pour un arithmotriangle quelconque est de même toujours résoluble sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle.*

Soient, en effet,  $x$ ,  $y$  et  $z$  les distances d'un point M de cette circonférence aux sommets ABC de l'arithmotriangle. Les deux théorèmes de Ptolémée relatifs au quadrilatère inscriptible ABCM se traduisent par les relations

$$\begin{aligned} cz &= ax + by, \\ \frac{c}{z} &= \frac{bx + ay}{xy + ab}; \end{aligned}$$

par multiplication membre à membre de ces deux relations, on obtient

$$c^2 = \frac{(ax + by)(bx + ay)}{xy + ab},$$

c'est-à-dire

$$x^2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} xy + z^2 = c^2,$$

ou encore

$$x^2 + 2\cos A \cdot xy + y^2 = c^2.$$

Si  $x$  et  $y$  sont regardées comme des coordonnées ordinaires, cette dernière équation est celle d'une ellipse passant par un certain nombre d'arithmopoints simples :  $(x = \pm c, y = 0)$ ,  $(x = 0, y = \pm c)$ ,  $(x = \pm a, y = \mp b)$ ,  $(x = \pm b, y = \mp a)$ . Il en résulte que cette ellipse est une arithmoconique et que, par suite,  $x$  et  $y$  peuvent être exprimés rationnellement en fonction d'un paramètre rationnel arbitraire; la formule

$$cz = ax + by$$

donne ensuite la troisième distance. Telle est la solution simple et complète du problème sur la circonférence circonscrite.

96. — Les résultats qui précèdent sont d'ailleurs liés entre eux d'une manière très simple. Soit tout d'abord une solution  $D$  du problème des arithmodistances sur la circonférence circonscrite au triangle  $ABC$ . Les segments  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ,  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$  sont, par définition, mesurés par des nombres rationnels. Si  $E$  est alors le point de concours des diagonales,  $AD$  et  $BC$  pour fixer les idées, du quadrilatère inscriptible  $ABCD$ , les divers triangles semblables de la figure fournissent des relations qui permettent d'évaluer très simplement les segments de diagonales et de vérifier, pour ce quadrilatère inscriptible, le théorème de Carnot-Kummer. De toute solution du problème des arithmodistances sur la circonférence inscrite au triangle, les alignements avec les sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  permettent donc de déduire trois nouvelles solutions situées sur le périmètre du triangle.

Réciproquement d'ailleurs, les mêmes relations simples prouvent que, d'une solution  $E$  située sur le périmètre du triangle, il est possible, par alignement avec l'un des sommets, d'en déduire une autre solution  $D$  située sur la circonférence circonscrite.

97. — A quels points de la surface du quatrième degré correspondent les solutions particulières dont il vient d'être question ?

Soit tout d'abord une solution sur le côté  $BC$ . Les coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  satisfont alors à l'une des équations

$$\pm y \pm z = a ,$$

correspondant aux trois segments formés par les points  $B$  et  $C$  sur la droite illimitée qui porte le côté  $BC$  et à l'équation qui traduit le théorème de Stewart; cette dernière est du second degré en  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Il en résulte qu'aux côtés du triangle correspondent trois coniques de la surface du quatrième ordre et les coniques symétriques de celles-ci par rapport aux plans coordonnés.

Ce sont des arithmoconiques d'après le résultat du paragraphe 95. Il en est de même des courbes qui correspondent aux trois arcs  $AB$ ,  $BC$  et  $CA$  de la circonférence circonscrite, d'après les relations qui traduisent les deux théorèmes de Ptolémée.

La solution du problème général des arithmodistances aux sommets d'un arithmotriangle résulte alors des considérations qui précèdent. Soit, en effet, une droite issue d'un sommet, A par exemple, et contenant les deux solutions particulières mais dépendant d'un paramètre arbitraire, D sur le cercle circonscrit et E sur le côté BC. Sur cette droite ADE le problème des arithmodistances s'exprime par les deux équations :

$$\begin{cases} y^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cos \beta , \\ z^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cos \gamma , \end{cases}$$

$\beta$  et  $\gamma$  étant les angles de la droite ADE avec les deux côtés partant du sommet A ; les cosinus de ces angles sont rationnels puisque les côtés des triangles ABE et ACE sont rationnels. Les deux équations qui précèdent représentent deux cylindres du second ordre et, par suite, sur la droite considérée ADE, le problème des arithmodistances aux sommets de ABC se rattache à l'étude d'une biquadratique gauche. Cette biquadratique gauche engendre évidemment la surface du quatrième degré, lorsque ADE pivote autour de A.

*Sur la surface du quatrième degré attachée au problème des arithmodistances aux sommets d'un triangle, il existe donc une triple infinité (à un paramètre) de biquadratiques gauches. Chacune de ces biquadratiques gauches admet des arithmopoints connus, situés sur les arithmoconiques de la surface.*

### Arithmotriangles à médianes rationnelles.

98. — ARITHMOTRIANGLES A MÉDIANES RATIONNELLES. D'une manière générale, le centre de gravité de l'aire d'un arithmotriangle n'est pas une solution particulière du problème des arithmodistances attaché à ce triangle, car les médianes ne sont pas généralement mesurées rationnellement. Le difficile problème qui consiste à déterminer les triangles dont les côtés et les médianes sont rationnellement mesurés a été l'objet de toute une série de Mémoires de L. EULER :

a) *Solutio problematis de inveniendō triangulo in quo rectæ ex singulis angulis latera opposita bisecantes sint rationales*

(1772), [Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae collectae, tomus prior, Petropoli, 1849, pp. 507-515].

b) *Investigatio trianguli, in quo distantiae angulorum ab ejus centro gravitatis rationaliter exprimantur* (1778) [ibid., tomus posterior, Petropoli, 1849, pp. 294-301].

c) *Solutio facilior problematis Diophantei circa triangulum, in quo rectae ex angulis latera opposita bisecantes rationaliter exprimantur* (1779) [ibid., tomus posterior, pp. 362-365].

d) *Problème de géométrie, résolu par l'analyse de Diophante* (1782) [ibid., tomus posterior, pp. 488-491].

Comme solutions simples, Euler donne dans ces divers mémoires les suivantes :

$a = 68$	$b = 87$	$c = 85$	$m_a = 158$	$m_b = 127$	$m_c = 131$
159	325	314	619	377	404
477	277	446	569	861	640

$a, b, c$  étant les côtés et  $m_a, m_b, m_c$  les médianes des triangles considérés.

e) Il faut en outre mentionner un fragment relatif à ces mêmes triangles : *Fragmenta commentationis cujusdam majoris, de invenienda relatione inter latera triangulorum quorum area rationaliter exprimi possit* (ibid., tomus posterior, pp. 648-651). La pièce débute par quelques considérations sur les triangles que nous nommons actuellement les arithmotriangles héroniens (pp. 648-649); puis Euler étudie, au titre de problème analogue, celui des arithmotriangles à médianes rationnelles (pp. 649-650): « quod autem illo difficilius est judicandum quoniam non generaliter solvi patitur ».

Ce problème consiste donc à résoudre le système suivant de trois équations

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = \square,$$

$$2(c^2 + a^2) - b^2 = \square,$$

$$2(a^2 + b^2) - c^2 = \square.$$

J'observerai que le problème qui consiste à déterminer un arithmotriangle  $(a, b, c)$  admettant une médiane rationnelle

(sans se préoccuper de la nature des deux autres) est résoluble de la manière suivante. L'équation du problème

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = \square ,$$

mise sous la forme

$$2(b^2 + c^2) = a^2 + \square ,$$

est susceptible d'être mise sous la nouvelle forme

$$(b + c)^2 + (b - c)^2 = a^2 + \square ;$$

il résulte de la théorie de l'arithmocercle que cette dernière équation admet pour solution générale

$$a = (b + c) \cos \alpha + (b - c) \sin \alpha ;$$

$b$  et  $c$  restent arbitraires,  $a$  est déterminé par cette équation, dans laquelle  $\alpha$  est un arc tel que  $\text{tang} \frac{\alpha}{2}$  est rationnel (je ne discute pas les conditions d'existence du triangle).

Il résulte de la remarque qui précède que, dans tout arithmotriangle à médianes rationnelles, les trois côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont liés entre eux par trois relations linéaires et homogènes

$$a = (b + c) \cos \alpha + (b - c) \sin \alpha ,$$

$$b = (c + a) \cos \beta + (c - a) \sin \beta ,$$

$$c = (a + b) \cos \gamma + (a - b) \sin \gamma ,$$

dans lesquelles  $\text{tang} \frac{\alpha}{2}$ ,  $\text{tang} \frac{\beta}{2}$ ,  $\text{tang} \frac{\gamma}{2}$  sont trois nombres rationnels algébriques

$$\text{tang} \frac{\alpha}{2} = x , \quad \text{tang} \frac{\beta}{2} = y , \quad \text{tang} \frac{\gamma}{2} = z ;$$

ces trois nombres sont assujettis à vérifier certaines inégalités assurant l'existence effective du triangle et une relation de compatibilité que je retiendrai seule :

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos \alpha + \sin \alpha & \cos \alpha - \sin \alpha \\ \cos \beta - \sin \beta & -1 & \cos \beta + \sin \beta \\ \cos \gamma + \sin \gamma & \cos \gamma - \sin \gamma & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

En posant, pour abrégier l'écriture

$$2X = x^2 - 1, \quad 2Y = y^2 - 1, \quad 2Z = z^2 - 1,$$

cette condition prend la forme :

$$\begin{vmatrix} X + 1 & X - x & X + x \\ Y + y & Y + 1 & Y - y \\ Z - z & Z + z & Z + 1 \end{vmatrix} = 0;$$

par développement du déterminant, cette équation se réduit finalement à celle

$$\begin{aligned} 3xyz(x + y + z) + x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) \\ + x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = 1, \end{aligned}$$

d'une surface algébrique du quatrième ordre dépourvue de ligne double.

Il y a, d'après ce qui précède, équivalence entre le problème d'EULER et l'étude arithmogéométrique de la surface précédente. A tout arithmotriangle à médianes simultanément rationnelles correspondent des arithmopoints de la surface, puisque les équations en  $\alpha, \beta, \gamma$  sont du second degré en  $x$ , en  $y$  et en  $z$ . Inversement à tout arithmopoint de la surface correspond une solution  $(a, b, c)$  définie à un même facteur près, dont l'existence correspond à une similitude arbitraire des triangles solutions.

Quant à l'étude arithmogéométrique de la surface mise en évidence, elle est immédiate, si l'on observe que c'est une surface du quatrième degré, admettant d'ailleurs quatre séries de sections planes simples ( $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$ ,  $z = \text{const.}$ ,  $x + y + z = \text{const.}$ ) qui sont des cubiques planes. De tout arithmopoint connu *a priori* ou par un procédé quelconque, se déduisent donc immédiatement quatre cubiques non complanés douées d'arithmopoints.

99. — Il est intéressant de noter en passant que *dans tout arithmotriangle pythagorique la médiane relative à l'hypoténuse est seule rationnelle*. Cette question n'est point traitée

dans les *Commentationes arithmeticae*, mais elle conduit à l'étude des équations simultanées

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \square, \\x^2 + 4y^2 &= \square,\end{aligned}$$

entre les cathètes d'un triangle, ces équations exprimant respectivement que le triangle est rectangle et que l'une des médianes relatives à l'une des cathètes est rationnelle. Ce système impossible a été considéré par EULER, dans le supplément de la pièce du 5 juin 1780, citée au paragraphe 87, à l'occasion de l'inexistence d'arithmotriangles télémétriques.

100. — Le problème traité par EULER dans son Mémoire qui a pour titre *Recherches sur le problème de trois nombres carrés tels que la somme de deux quelconques, moins le troisième, fasse un nombre carré* (Leonhardi Euleri, *Commentationes arithmeticae collectae, tomus posterior, Petropoli, 1849, pp. 603-616*) se rattache manifestement par analogie au problème des arithmotriangles à médianes rationnelles. Les équations sont ici

$$\begin{aligned}b^2 + c^2 - a^2 &= \square = p^2, \\c^2 + a^2 - b^2 &= \square = q^2, \\a^2 + b^2 - c^2 &= \square = r^2;\end{aligned}$$

Euler en signale toute une série de solutions particulières, telles que

	I	II	III	IV	V
$a =$	241	397	425	595	493
$b =$	269	593	373	769	797
$c =$	149	707	205	965	937

auxquelles correspondent respectivement les nombres :

	I	II	III	IV	V
$p =$	191	833	23	1081	1127
$q =$	89	553	289	833	697
$r =$	329	97	527	119	289



Ici encore, en posant

$$a = b \cos \alpha + c \sin \alpha ,$$

$$b = c \cos \beta + a \sin \beta ,$$

$$c = a \cos \gamma + b \sin \gamma ,$$

avec  $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = x$ ,  $\operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = y$ ,  $\operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} = z$  le problème se ramène à l'étude arithmogéométrique d'une surface dont le premier membre de l'équation est le développement du déterminant exprimant la compatibilité entre les relations qui précèdent :

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & -1 & \cos \beta \\ \cos \gamma & \sin \gamma & -1 \end{vmatrix} = 0 ;$$

cette surface est représentée par l'équation du sixième degré :

$$\begin{aligned} x^2 y^2 z^2 + xyz(x + y + z) - 4xyz - (x - y)(y - z)(z - x) \\ + x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0 . \end{aligned}$$

Quoique le degré de cette surface soit aussi élevé, il se trouve qu'en raison de la nature de sa courbe à l'infini, une grande simplification se produit ici. Les sections par les plans parallèles à l'un quelconque des plans coordonnés sont, en effet, des quartiques planes. En outre, une telle quartique se présente manifestement comme étant la projection d'une biquadratique gauche. Si l'on considère, en effet, la quartique située dans le plan de cote  $z_0$  et si l'on pose

$$xy = t ,$$

la quartique considérée n'est autre que la projection de la biquadratique gauche, intersection du parabolôïde hyperbolique représenté par cette dernière équation en  $x$ ,  $y$  et  $t$  par une autre quadrique dont l'équation est moins simple. De la connaissance d'une solution particulière du problème il est donc possible de déduire une infinité de nouvelles solutions, comme application de la théorie des fonctions elliptiques.

(A suivre)