

# DEUX CONFÉRENCES SUR LA NOMOGRAPHIE

Autor(en): **d'Ocagne, Maurice**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-17314>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# DEUX CONFÉRENCES SUR LA NOMOGRAPHIE

*données les 28 et 29 juillet 1914 à l'Université d'Edimbourg*<sup>1</sup>

PAR

Maurice d'OCAGNE, Prof. à l'École Polytechnique de Paris.

---

## II. — APPLICATION DES NOMOGRAMMES A ALIGNEMENT AUX DIFFÉRENTS CAS DE RÉOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES

*Préliminaires.*

1. — Si l'on désigne, dans un triangle sphérique, les côtés par  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et les angles opposés par  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ces six éléments étant exprimés en fractions (degrés ou grades) de la circonférence, les problèmes concernant la résolution des triangles sphériques, tels qu'ils se présentent en astronomie, géodésie et navigation, sont tous renfermés dans l'énoncé général que voici :

*Etant donnés trois des six éléments  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , trouver l'un des autres.*

Il convient de noter que, contrairement à ce qui se rencontre dans les traités classiques, cet énoncé propose la recherche d'*un seul* des éléments inconnus, et non des trois.

Cette distinction est essentielle au point de vue de la solution par les méthodes nomographiques. Ainsi qu'on le verra par la suite, le premier énoncé exige pour sa solution trois nomogrammes distincts, tandis que, pour le second, un seul suffit.

---

<sup>1</sup> Au cours du *Colloquium* tenu à l'occasion du tricentenaire de l'invention des logarithmes. Pour la *première partie*, voir *l'Enseig. mathém.* du 15 nov. 1916.

2. — S'il ne s'agit d'obtenir qu'un seul des trois éléments inconnus, comme cela a lieu dans les importantes applications à l'astronomie, il y a lieu de considérer la disposition du système de quatre éléments, constitué par les trois éléments donnés et celui qui est inconnu.

Cette disposition peut être l'une des trois suivantes :

1° Deux couples d'éléments contigus séparés l'un de l'autre par deux éléments non intervenants, tels que  $A, b$  et  $B, a$ . Une semblable disposition sera désignée par le symbole (2, 2).

2° Trois éléments contigus et le quatrième isolé de ce groupe, par conséquent opposé à celui des éléments qui se trouve au milieu du groupe, par exemple  $b, A, c$  et  $a$ . Une telle disposition sera désignée par le symbole (3, 1).

3° Quatre éléments contigus comme  $C, a, B, c$ . Une telle disposition sera désignée par le symbole (4).

A ces trois dispositions correspondent respectivement les formules

$$\sin A \sin b = \sin a \sin B, \quad (1)$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad (2)$$

$$\cos a \cos B = \sin a \cotg c - \sin B \cotg C, \quad (3)$$

dans chacune desquelles l'un quelconque des quatre éléments peut être pris comme inconnue. Dans le cas (3,1), si l'élément isolé est un angle au lieu d'un côté, comme cela a lieu pour la formule (2), il est nécessaire d'appliquer la formule au triangle supplémentaire en remplaçant  $a, b, c, A$  par  $\pi - A, \pi - B, \pi - C, \pi - a$ .

Il est aisé de voir que, si l'on se donne trois quelconques des six éléments d'un triangle, on peut toujours leur associer l'un des trois autres, de façon à obtenir une disposition (3, 1). Une fois ce premier élément déterminé par l'application de la formule (2), on peut encore constituer une disposition (3, 1) pour chacun des deux éléments restants en l'associant convenablement à trois autres pris parmi les quatre déjà connus. Il en résulte qu'*au moyen de la seule formule (2) on peut obtenir la résolution COMPLÈTE du triangle.*

Mais il est avantageux, dans certaines applications de l'astronomie, de déterminer *directement un seul* des trois

éléments inconnus, sans avoir à passer par l'intermédiaire d'un des autres, et cela nécessite l'application de la formule particulière qui correspond à la disposition des éléments auxquels on a affaire. Donc, pour la résolution nomographique directe, dans tous les cas possibles, trois nomogrammes sont nécessaires, correspondant aux trois formules fondamentales ci-dessus données.

3. — Avant de passer à la construction de ces trois nomogrammes, il convient de faire une remarque spéciale relative aux formules applicables au triangle rectangle. Supposons que deux des éléments (autres que l'angle droit) d'un tel triangle soient donnés. Pour en déduire un troisième, nous n'avons qu'à considérer la disposition formée par ces trois éléments et l'angle droit et à appliquer la formule appropriée.

Par exemple, si nous voulons connaître la relation entre l'hypoténuse  $a$ , l'un des côtés  $b$  et l'angle compris  $C$ , nous reconnaissons que la disposition formée par ces trois éléments et l'angle droit  $A$  est de celles désignées par (4). Une permutation circulaire de (3) donne

$$\cos b \cos C = \sin b \cotg a - \sin C \cotg A ,$$

qui, lorsqu'on tient compte de  $A = \frac{\pi}{2}$ , devient

$$\cos b \cos C = \sin b \cotg a ,$$

ou

$$\tg b = \tg a \cos C ,$$

formule classique, et de même pour les autres cas.

Il est ainsi démontré que les trois nomogrammes appropriés aux formules (1), (2), (3) fournissent la solution complète de tous les problèmes en question. Il est vrai que d'autres formules, telles que les analogies de Neper, sont employées pour les calculs ordinaires. Cela a pour but de permettre de recourir au calcul logarithmique; mais une telle considération n'intervient pas lorsque l'on fait usage des méthodes nomographiques.



*Nomogramme de la formule (1).*

4. — Pour obtenir un nomogramme de la formule (1) il suffit de l'écrire sous la forme

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B} \quad (1)$$

La construction est alors immédiatement évidente par la géométrie la plus élémentaire.

Si, sur deux droites parallèles, on porte les segments  $A_0A$  et  $A_0a$  proportionnels à  $\sin A$  et  $\sin a$ ,  $B_0B$  et  $B_0b$  propor-

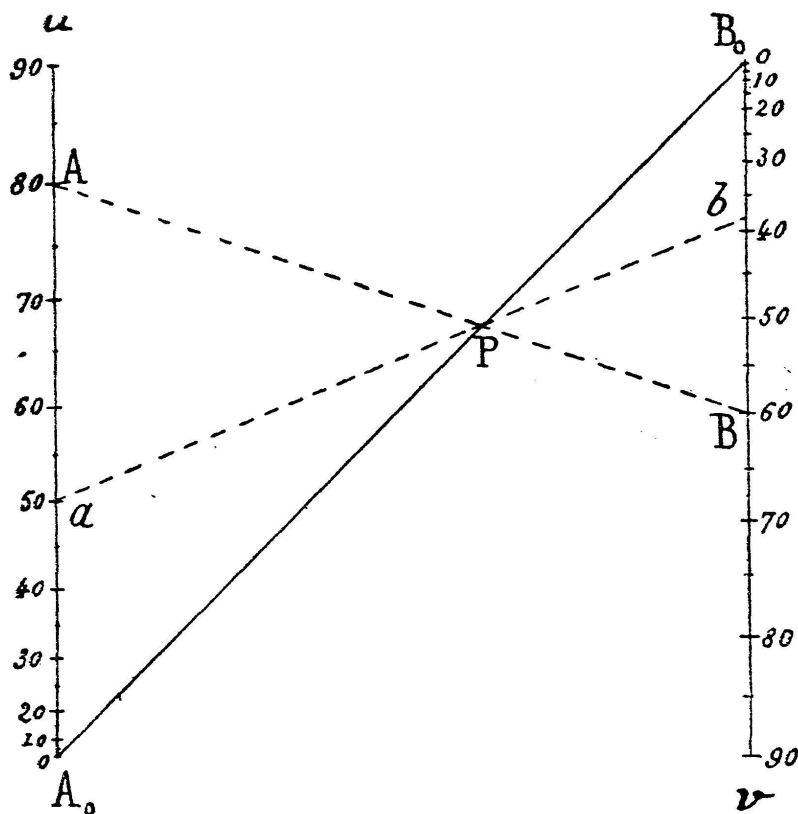


Fig. 13.

tionnels à  $\sin B$  et  $\sin b$  respectivement, l'équation précédente exprime que les droites  $AB$  et  $ab$  coupent la droite  $A_0B_0$  au même point  $P$  (fig. 13)<sup>1</sup>.

Cela suggère l'idée de construire deux échelles de sinus

<sup>1</sup> Cette figure et les suivantes sont faites à une trop petite échelle pour pouvoir se prêter à un usage courant et ne doivent être regardées que comme servant à illustrer les explications données dans le texte.

identiques, sur deux axes parallèles, avec les zéros en  $A_0$  et  $B_0$  et des graduations de sens contraires en vue de faire en sorte que ce point  $P$  tombe entre  $A_0$  et  $B_0$ . Les deux droites  $AB$  et  $ab$  coupent alors  $A_0B_0$  en un même point  $P$ .

Supposons, par exemple, que  $A$ ,  $B$ ,  $a$  soient donnés et  $b$  à trouver. L'opération est la suivante : Les points dont les cotes sont  $A$  et  $B$  sur les deux échelles sont joints par une droite qui coupe  $A_0B_0$  en un point  $P_1$ ; la droite joignant ce point  $P$  au point coté  $a$  sur la première échelle coupe la seconde en un point dont la cote est  $b$ .

Nous avons eu recours à la géométrie élémentaire pour exposer le principe de ce nomogramme parce que c'est la méthode la plus naturelle ; mais il est clair que, si on le veut, on peut établir ce principe suivant la théorie générale ; il suffit de procéder comme suit :

Appelant  $t$  la commune valeur des deux rapports ci-dessus, on a

$$\sin a = t \sin b ,$$

et, si l'on pose <sup>1</sup>

$$\sin a = u , \quad \sin b = -v ,$$

il vient pour l'équation du point ( $t$ ),

$$u + vt = 0 .$$

Celle-ci représente les points de l'axe  $A_0B_0$  des origines, et de même pour le second rapport.

### *Nomogramme de la formule (2).*

5. — Récrivant cette formule sous la forme

$$\cos a - \sin b \sin c \cos A = \cos b \cos c ,$$

nous voyons que, pour obtenir sa représentation par un nomogramme à alignement, il suffit de poser

$$u = \cos a , \quad v = -\cos A . \quad (4)$$

<sup>1</sup> Ici, comme dans la suite, il est fait usage de coordonnées parallèles  $u$  et  $v$  pour la construction des nomogrammes (1, 5), et l'on désigne par  $A_0$  et  $B_0$  les origines des axes coordonnés afin de réserver la notation  $A$  et  $B$  pour les angles des triangles sphériques.

Ces équations définissent les graduations des axes  $A_0u$  et  $B_0v$  et donnent pour le réseau des points  $(b, c)$  l'équation

$$u + v \sin b \sin c = \cos b \cos c . \quad (5)$$

La symétrie de cette équation en  $b$  et  $c$  montre que les courbes  $(b)$  et les courbes  $(c)$  sont les mêmes. Ce sont les courbes de cette famille unique qui, en se recoupant elles-mêmes, engendrent le réseau des points  $(b, c)$ .

Proposons-nous d'abord de former l'équation des courbes du système obtenu par la variation de  $c$ . Nous avons à déterminer le lieu du point d'équation (5) lorsque  $c$  y est regardé comme variable. L'équation en  $u$  et  $v$  de ce lieu résulte de l'élimination de ce paramètre  $c$  entre l'équation (5) et sa dérivée prise par rapport à  $c$ , c'est-à-dire

$$v \sin b \cos c = - \cos b \sin c , \quad (6)$$

Faisant la somme des équations (5) et (6) après avoir multiplié, d'une part, la première par  $\sin c$  et la seconde par  $\cos c$ , et, d'autre part, la première par  $\cos c$  et la seconde par  $\sin c$ , on a les équations

$$u \sin c = - v \sin b , \quad u \cos c = \cos b ,$$

qui, élevées au carré et additionnées, donnent

$$u^2 = v^2 \sin^2 b + \cos^2 b , \quad (7)$$

qu'on peut écrire

$$u^2 - 1 = \sin^2 b (v^2 - 1) . \quad (7')$$

Sous la forme (7), l'équation montre que *les courbes (b) sont des ellipses dont un axe est dirigé suivant la droite  $A_0B_0$  joignant les origines des axes  $A_0u$  et  $B_0v$* <sup>1</sup>. Sous la forme (7') l'équation fait apparaître que *ces ellipses appartiennent à un faisceau tangentiel comprenant les coniques dégénérées  $u^2 - 1 = 0$ ,  $v^2 - 1 = 0$  qui consistent chacune en un couple de points réels ( $u = \pm 1$ ,  $v = \pm 1$ ).*

En d'autres termes, *les ellipses (b) sont toutes inscrites dans*

<sup>1</sup> Voir, pour une théorie complète des coniques en coordonnées parallèles, la brochure de l'auteur : *Coordonnées parallèles et axiales* (Paris ; Gauthier-Villars ; 1885).

le quadrilatère formé par les quatre droites joignant chacun des points  $u = \pm 1$  à chacun des points  $v = \pm 1$ .

Si, comme c'est le cas sur la fig. 14, nous prenons comme module de chacune des échelles des cosinus, la moitié de la distance entre les axes  $A_0u$  et  $B_0v$ , ces axes étant perpendiculaires à  $A_0B_0$ , les points  $u = \pm 1$ ,  $v = \pm 1$  forment un

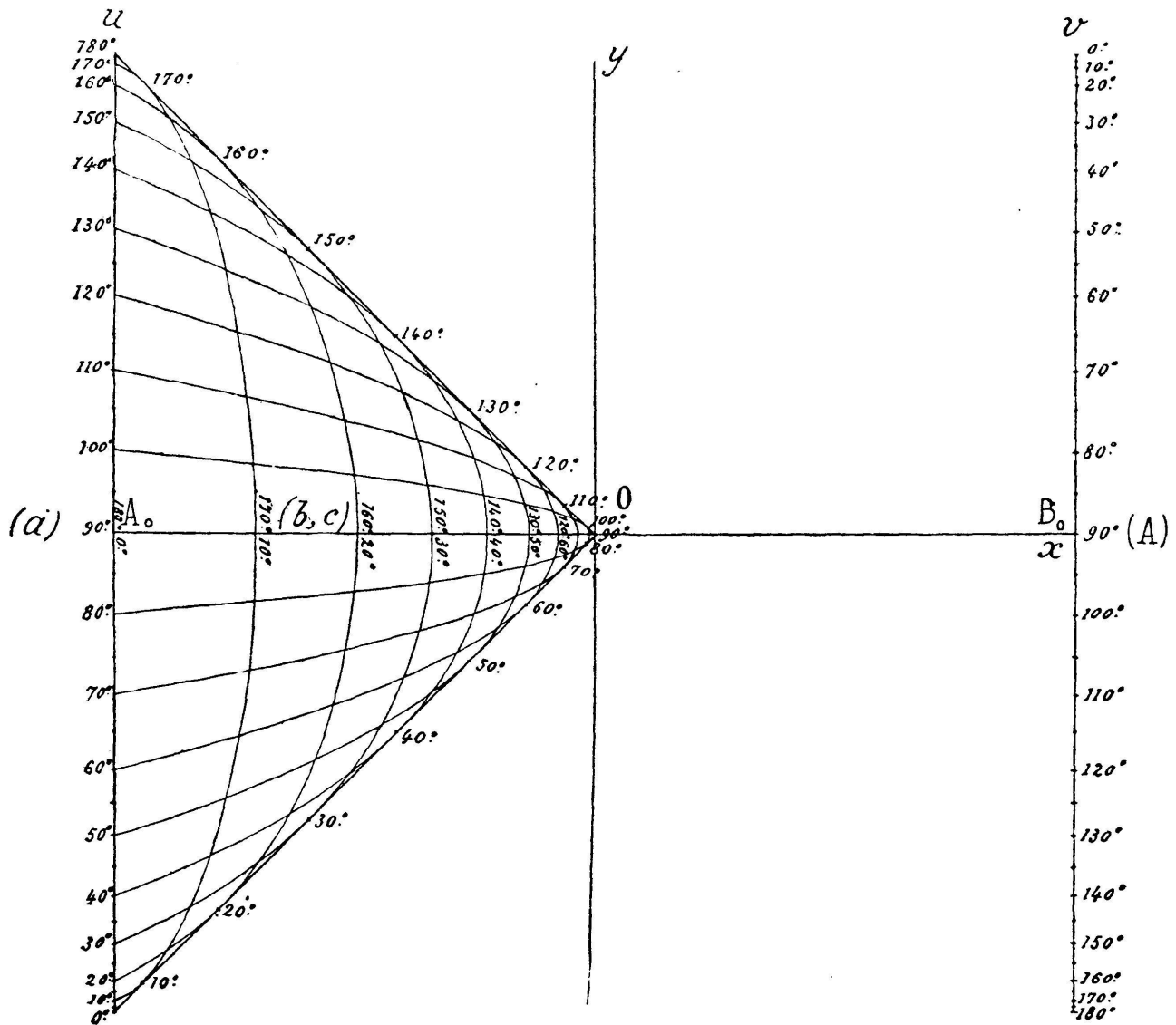


Fig. 14.

carré dont deux des côtés sont parallèles à  $A_0B_0$ . Ces deux côtés et les deux diagonales du carré constituent les quatre tangentes communes à toutes les ellipses (b).

6. — Pour le tracé de ces ellipses, point par point, nous aurons recours aux coordonnées cartésiennes rapportées aux axes  $Ox$  et  $Oy$  pour lesquels l'origine  $O$  est le milieu  $A_0B_0$ ,

le sens positif de  $Ox$  confondu avec  $OB_0$ , l'axe  $Oy$  parallèle aux axes  $A_0u$  et  $B_0v$  et de même sens.

Avec ces axes, les coordonnées du point  $(b, c)$  sont

$$x = -\frac{1 - \sin b \sin c}{1 + \sin b \sin c}, \quad y = \frac{\cos b \cos c}{1 + \sin b \sin c}. \quad (8)$$

Notons que, si  $b$  et  $c$  sont compris entre  $0$  et  $\pi$ ,

$$-1 < x < 0$$

et que

$$0 < y < 1 \quad \text{ou} \quad -1 < y < 0$$

suivant que  $b$  et  $c$  sont tous deux du même côté ou de côtés différents par rapport à  $\frac{\pi}{2}$ .

Cette dernière remarque est importante en ce qu'elle donne le moyen d'éviter toute ambiguïté dans la correspondance entre les couples de valeurs de  $b$  et  $c$  et les points du réseau  $(b, c)$ . L'équation (7) montre que l'ellipse ( $b$ ) ou ( $c$ ) est la même pour deux valeurs supplémentaires de l'angle correspondant; en outre, les ellipses ( $b$ ) et ( $c$ ) ont deux points communs symétriques par rapport à  $Ox$  dans la partie utilisée du réseau; mais la remarque ci-dessus établit clairement que l'on doit prendre le point au-dessus ou au-dessous de  $Ox$  suivant que  $b$  et  $c$  sont du même côté ou de côtés différents par rapport à  $\frac{\pi}{2}$ .

Supposons maintenant que  $b$  et  $c$  soient égaux ou supplémentaires, de telle sorte que les ellipses correspondantes coïncident. Par passage à la limite, on voit que l'on doit prendre pour point  $(b, c)$  sur le nomogramme le point de contact de l'ellipse unique avec l'une des tangentes communes issues de  $O$ , soit au-dessus, soit au-dessous de  $Ox$ . Dans chaque cas, en vertu de ce qui précède, il n'y a pas la moindre hésitation à avoir dans le choix de ce point  $(b, c)$ , non plus que dans la détermination de la valeur d'un de ces angles lorsqu'un tel point et la valeur de l'autre angle sont connus.

L'équation cartésienne de l'ellipse ( $b$ ), dont (7) fait connaître

l'équation en coordonnées parallèles, est facile à former. Des équations (8) on tire sans difficulté

$$\sin b \sin c = \frac{1+x}{1-x}, \quad \cos b \cos c = \frac{2y}{1-x},$$

d'où, par élimination de  $c$ ,

$$\frac{(1+x)^2}{\sin^2 b} + \frac{4y^2}{\cos^2 b} = (1-x)^2$$

ou

$$(1+x^2) \cos^2 b + 4y^2 \sin^2 b = (1-x)^2 \sin^2 b \cos^2 b. \quad (9)$$

De cette équation on tire immédiatement que, pour  $x = -1$ , on a  $y = \pm \cos b$ , c'est-à-dire que l'ellipse ( $b$ ) coupe l'échelle  $a$  portée sur  $A_0u$  aux points cotés  $b$  et  $\pi - b$ .

Il convient aussi de remarquer que si, dans (7), on fait  $v = 0$ , on a  $u = \pm \cos b$ , ce qui signifie que la droite joignant les points cotés  $b$  et  $\pi - b$  de l'échelle ( $a$ ) au point  $B_0$  sont tangentes à l'ellipse ( $b$ ) en ces points.

7. — Au moyen soit des formules (8), soit de l'équation (9), nous pouvons construire les ellipses ( $b$ ) [avec lesquelles, ainsi que nous l'avons précédemment observé, coïncident les ellipses ( $c$ )] par les procédés ordinaires de la géométrie analytique. Mais un mode de construction plus simple et plus expéditif est fourni par la considération de l'équation (2). En fait, d'après ce que nous avons vu, cette équation exprime l'alignement des points ( $a$ ) de  $A_0u$ , ( $A$ ) de  $B_0v$  et ( $b, c$ ). Deux tels alignements obtenus pour ( $b, c$ ) par le calcul de deux couples simples de valeurs de  $a$  et  $A$  déterminent la position de ce point ( $b, c$ ).

Or, la formule (2) montre que, pour  $A = 0$ , nous avons  $a = b - c$ , et, pour  $A = \pi$ ,  $a = b + c$ . Ces deux couples de valeurs de  $a$  et  $A$  déterminent des droites dont le point d'intersection coïncide avec le point ( $b, c$ ).

De là, la construction suivante du système des ellipses ( $b$ ) ou ( $c$ ): *Les axes  $A_0u$  et  $B_0v$  portant les échelles ( $a$ ) et ( $A$ ) définies par les formules (4), on joint chacun des points  $A = 0$  et  $A = \pi$  à tous les points de l'échelle ( $a$ ) et l'on obtient ainsi deux faisceaux de droites dont les mutuelles intersections se trou-*

vent sur les ellipses (b). Pour que deux droites de ces faisceaux se coupent en un point de l'ellipse (b) il est nécessaire et suffisant que la somme ou la différence des angles correspondant à ces deux droites soit égale à  $2b$ .

C'est par ce moyen qu'a été construit le nomogramme de la fig. 14. Son mode d'emploi résulte dans tous les cas de l'énoncé suivant :

*Le point (b, c) étant celui des points d'intersection des ellipses (b) et (c) qui est au-dessus ou au-dessous de  $A_0B_0$  suivant que b et c sont ou non du même côté par rapport à  $\frac{\pi}{2}$ , les points cotés (a), (A) et (b, c) sont en ligne droite.*

*Nomogramme de la formule (3).*

8. — Récrivons cette formule ainsi

$$\cotg c \sin a - \cotg C \sin B = \cos a \cos B \quad (3)$$

et posons

$$u = \cotg c, \quad v = -\cotg C. \quad (10)$$

Ces formules définissent les échelles portées sur les axes  $A_0u$  et  $B_0v$  et donnent pour le réseau de points (a, B) l'équation

$$u \sin a + v \sin B = \cos a \cos B. \quad (11)$$

Pour avoir l'équation en  $u$  et  $v$  de la courbe (a) résultant de la variation de B, il faut éliminer B entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à B, c'est-à-dire

$$v \cos B = -\cos a \sin B. \quad (12)$$

Si l'on fait la somme de ces équations après les avoir multipliées respectivement d'abord par  $\cos B$  et  $-\sin B$ , puis par  $\sin B$  et  $\cos B$ , on obtient

$$u \sin a \cos B = \cos a, \quad u \sin a \sin B = -v,$$

équations qui, élevées au carré et additionnées, donnent

l'équation cherchée

$$u^2 \sin^2 a = v^2 + \cos^2 a , \quad (13)$$

ou

$$(u^2 + 1) \sin^2 a = v^2 + 1 . \quad (13')$$

Sous la forme (12), l'équation montre que *les courbes (a) sont des hyperboles dont un des axes est situé sur  $A_0B_0$* , et, d'après la forme (13'), il est évident que *ces hyperboles forment un faisceau tangentiel comprenant les coniques dégénérées  $u^2 + 1 = 0$ ,  $v^2 + 1 = 0$ , qui consistent chacune en un couple de points imaginaires ( $u = \pm i$  et  $v = \pm i$ )*.

En d'autres termes, *les hyperboles (a) sont toutes inscrites dans le quadrilatère formé par les quatre droites joignant chacun des points  $u = \pm i$  à chacun des points  $v = \pm i$* .

Par rapport aux axes cartésiens que nous associons de façon permanente aux axes parallèles  $A_0u$  et  $B_0v$ , ces droites ont pour équations

$$y = \pm i , \quad y = \pm ix .$$

Les dernières sont les droites *isotropes* issues de l'origine  $O$ , ce qui prouve que *l'origine  $O$  est un foyer commun à toutes les hyperboles du faisceau*<sup>1</sup>.

Si nous permutons  $a$  avec  $B$ , et  $u$  avec  $v$ , cela ne change rien à l'équation (11), de sorte que nous avons immédiatement pour l'équation des courbes (B)

$$u^2 + 1 = (v^2 + 1) \sin^2 B , \quad (14)$$

qui définit un faisceau d'hyperboles, algébriquement identique au précédent. Seulement, les hyperboles (a), qui ont un foyer commun en  $O$ , ont leur concavité tournée du côté de  $A_0$ , tandis que les hyperboles (B) qui ont aussi un foyer commun en  $O$  ont leur concavité tournée du côté  $B_0$ . Ces deux faisceaux (a) et (B) sont symétriques l'un de l'autre par rapport à  $Oy$  (fig. 15)<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Il est à noter que ces hyperboles n'ont en commun qu'un seul foyer et non deux, attendu que les deux autres côtés du quadrilatère dans lequel elles sont inscrites sont des parallèles imaginaires à  $Ox$  et non des droites isotropes.

<sup>2</sup>Ce nomogramme a été effectivement construit en vue de son application particulière à la détermination particulière de l'azimut, pour le point à la mer, par le M. lieutenant de vaisseau Perret (*Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Cherbourg, 1905*).



9. — Comme dans le cas précédent, nous allons passer aux coordonnées cartésiennes, par rapport aux mêmes axes que ci-dessus, en vue de la construction des hyperboles point par point.

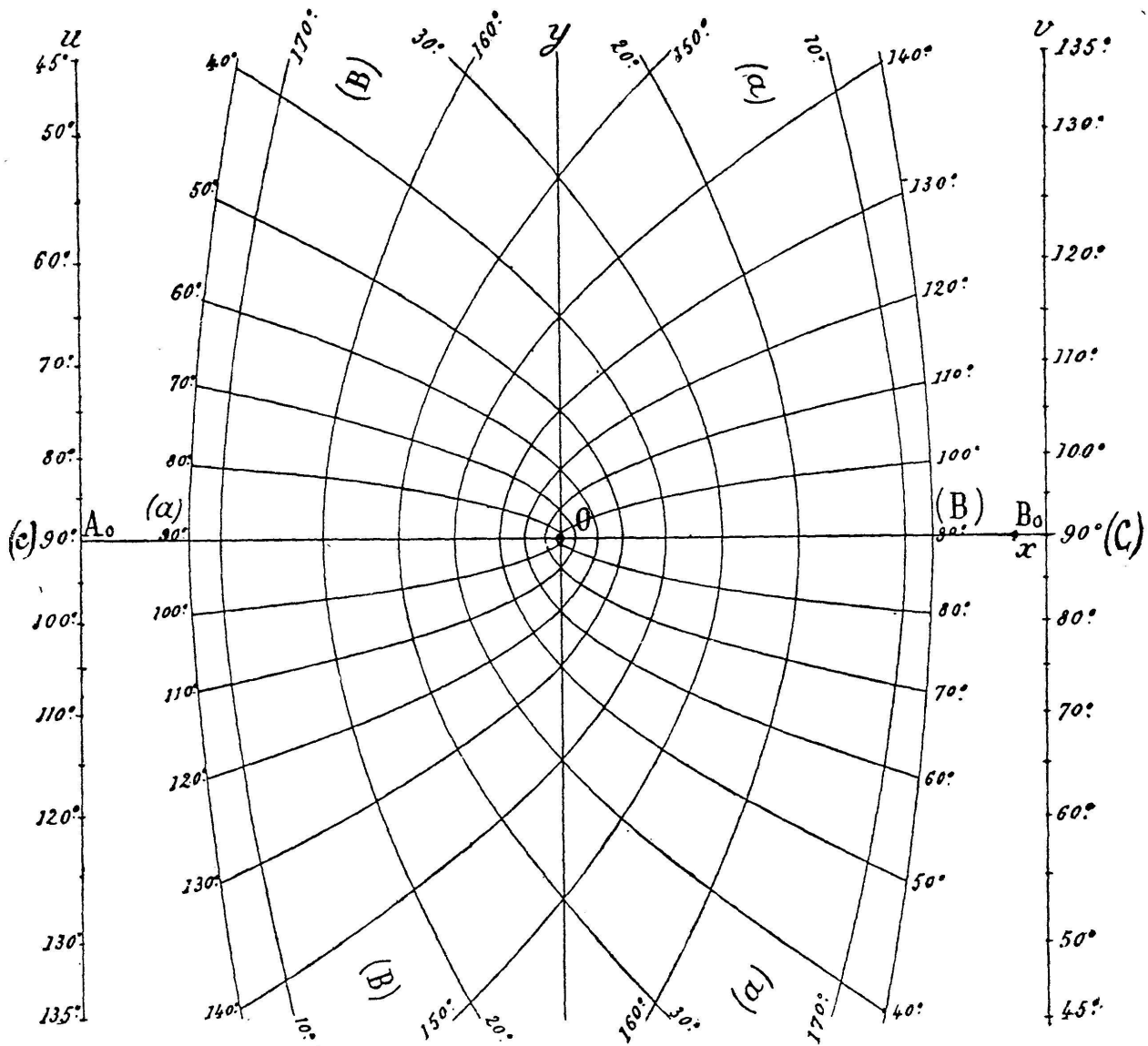


Fig. 15.

Les coordonnées du point  $(a, B)$  sont

$$x = \frac{\sin B - \sin a}{\sin B + \sin a}, \quad y = \frac{\cos a \cos B}{\sin a + \sin B}. \quad (15)$$

Notons que si  $a$  et  $B$  sont compris 0 et  $\pi$ , nous avons toujours

$$-1 < x < 1,$$

et que

$$y > 0 \quad \text{ou} \quad y < 0,$$

suivant que  $a$  et  $B$  sont ou non du même côté par rapport à  $\frac{\pi}{2}$ . Cela donne le moyen de faire disparaître toute ambiguïté dans la détermination, sur la partie utile du nomogramme, du point correspondant à un couple de valeurs données de  $a$  et  $B$ .

Pour avoir l'équation cartésienne des hyperboles ( $a$ ), nous n'avons qu'à tirer de (15)

$$\sin B = \frac{1+x}{1-x} \sin a, \quad \cos B = \frac{2y}{1-x} \operatorname{tg} a,$$

et nous obtenons ainsi

$$(1+x)^2 \sin^2 a + 4y^2 \operatorname{tg}^2 a = (1-x)^2$$

ou

$$(1-x)^2 \cos^2 a - 4y^2 \sin^2 a = (1+x)^2 \sin^2 a \cos^2 a. \quad (16)$$

Grâce à la remarque précédente concernant la permutation des axes  $A_0u$  et  $B_0v$  dont les équations cartésiennes sont respectivement  $x+1=0$  et  $x-1=0$ , nous déduisons immédiatement de là l'équation des hyperboles ( $B$ )

$$(1+x)^2 \cos^2 B - 4y^2 \sin^2 B = (1-x)^2 \sin^2 B \cos^2 B. \quad (17)$$

De la comparaison de ces équations (16) et (17) avec l'équation (9) il ressort immédiatement que les deux faisceaux d'ellipses et d'hyperboles, ci-dessus rencontrés, se déduisent l'un de l'autre au moyen de la transformation homographique

$$x' = \mp x, \quad y' = yi,$$

qui fait correspondre aux droites issues de l'origine et inclinées à  $45^\circ$  sur  $A_0B_0$  les droites isotropes semblablement issues de  $O$ .

Pour  $x = -1$ , l'équation (16) donne  $y = \pm \cotg a$ , ce qui montre que l'hyperbole ( $a$ ) rencontre l'axe  $A_0u$  aux points cotés  $a$  et  $\pi - a$  de l'échelle ( $c$ ). De même, si l'on fait  $x = 1$  dans l'équation (17), on voit que l'hyperbole ( $B$ ) coupe l'axe  $B_0v$  aux points cotés  $B$  et  $\pi - B$  de l'échelle ( $c$ ).

D'ailleurs, si l'on fait  $v = 0$  dans l'équation (13), ou  $u = 0$

dans l'équation (14), on constate que les tangentes aux hyperboles ( $a$ ) en leurs points d'intersection avec  $A_0u$  passent par  $B_0$  et que les tangentes aux hyperboles ( $B$ ) en leurs points d'intersection avec  $B_0v$  passent par  $A_0$ .

Contrairement à ce qui avait lieu pour le précédent nomogramme, dont la partie utile — lorsque les variables restent comprises entre  $0$  et  $\pi$  — est enfermée dans une aire limitée, ce nouveau nomogramme, pour les mêmes limites attribuées aux variables, s'étend de  $-\infty$  à  $+\infty$  dans la direction de  $Oy$ . Pratiquement, donc, il n'est possible de construire qu'une partie restreinte de ce nomogramme. Pour atteindre des valeurs des variables en dehors de ce domaine, il est nécessaire de recourir à des transformations homologiques comme celles qui ont été envisagées dans la première conférence (I, 7 et note additionnelle).

### *Nomogrammes divers relatifs à la résolution des triangles sphériques.*

10. — Si l'on ne stipule pas, comme nous l'avons fait ci-dessus, que l'on veut obtenir un élément inconnu d'un triangle sphérique dont trois éléments sont donnés, à l'aide d'une seule lecture, on peut arriver à ce résultat au moyen de plusieurs lectures successives faites sur un nomogramme unique. Au point de vue de la construction, ce nomogramme est beaucoup plus simple que les précédents et constitue ce qu'on peut appeler une *grille trigonométrique*.

Cette grille se construit de la manière suivante : à un cercle gradué en degrés on circonscrit un carré dont les côtés sont parallèles et perpendiculaires au diamètre  $0^\circ - 180^\circ$ . A l'intérieur de ce carré on trace les droites joignant les points de division du cercle qui sont symétriques soit par rapport au diamètre  $0^\circ - 180^\circ$ , soit au diamètre  $90^\circ - 270^\circ$ . Chacune de ces droites est associée aux graduations des deux points du cercle divisé qu'elle relie.

Il a été établi que, grâce à l'introduction, en certains cas, d'angles auxiliaires, cette grille permet d'obtenir la résolu-

tion complète de tout triangle sphérique<sup>1</sup>. Mais une telle solution, comme on s'en rend aisément compte, offre surtout un intérêt théorique. En pratique, il y a un sérieux avantage à obtenir le résultat cherché au moyen d'une seule lecture et c'est là ce qui confère leur importance aux nomogrammes que nous venons de décrire ci-dessus.

Dans certaines applications, l'un des quatre éléments en question peut être regardé comme constant, et il devient avantageux, en un tel cas, de construire un nomogramme particulier à trois variables se déduisant d'un des précédents nomogrammes par fixation, sur l'un des quatre systèmes cotés, d'un élément unique correspondant à la valeur constante donnée.

Supposons, par exemple, que le problème consiste à représenter la relation entre les trois côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  d'un triangle sphérique rectangle en  $A$ . La relation en question, qui peut se déduire de (2) lorsqu'on y fait  $A = \frac{\pi}{2}$ , est

$$\cos a = \cos b \cos c . \quad (18)$$

Le nomogramme correspondant est celui de la fig. 14 sur lequel on supprime la graduation (A) de l'axe  $B_0v$ , tous les alignements étant alors pris sur le point  $B_0$ .

Une telle solution présente l'intérêt théorique d'être contenue dans le cas général. Mais il est clair qu'on peut lui substituer une solution beaucoup plus simple qui s'offre immédiatement à l'esprit. Posant

$$u = \cos a , \quad v = - \cos b ,$$

ou a, pour  $c$ , l'échelle

$$u + v \cos c = 0 ,$$

portée sur l'axe  $A_0B_0$ .

Les échelles (a) et (b) sont obtenues par remplacement, sur la fig. 13, des angles inscrits le long de  $A_0u$  et de  $B_0v$  par leurs compléments, et l'échelle (c) n'est autre que la projec-

---

<sup>1</sup> On voudra bien se reporter au mémoire publié par l'auteur sur ce sujet (*Bulletin de la Société mathématique de France*, T. 32, 1904, p. 196).

tion de  $(a)$  sur  $A_0B_0$  à partir du point  $b = 0$ , puisque, pour cette valeur de  $b$ , la formule (18) donne  $a = c$ .

Pour prendre un autre exemple, proposons-nous de représenter la relation entre l'angle horaire  $AH$ , la déclinaison  $\mathcal{D}$

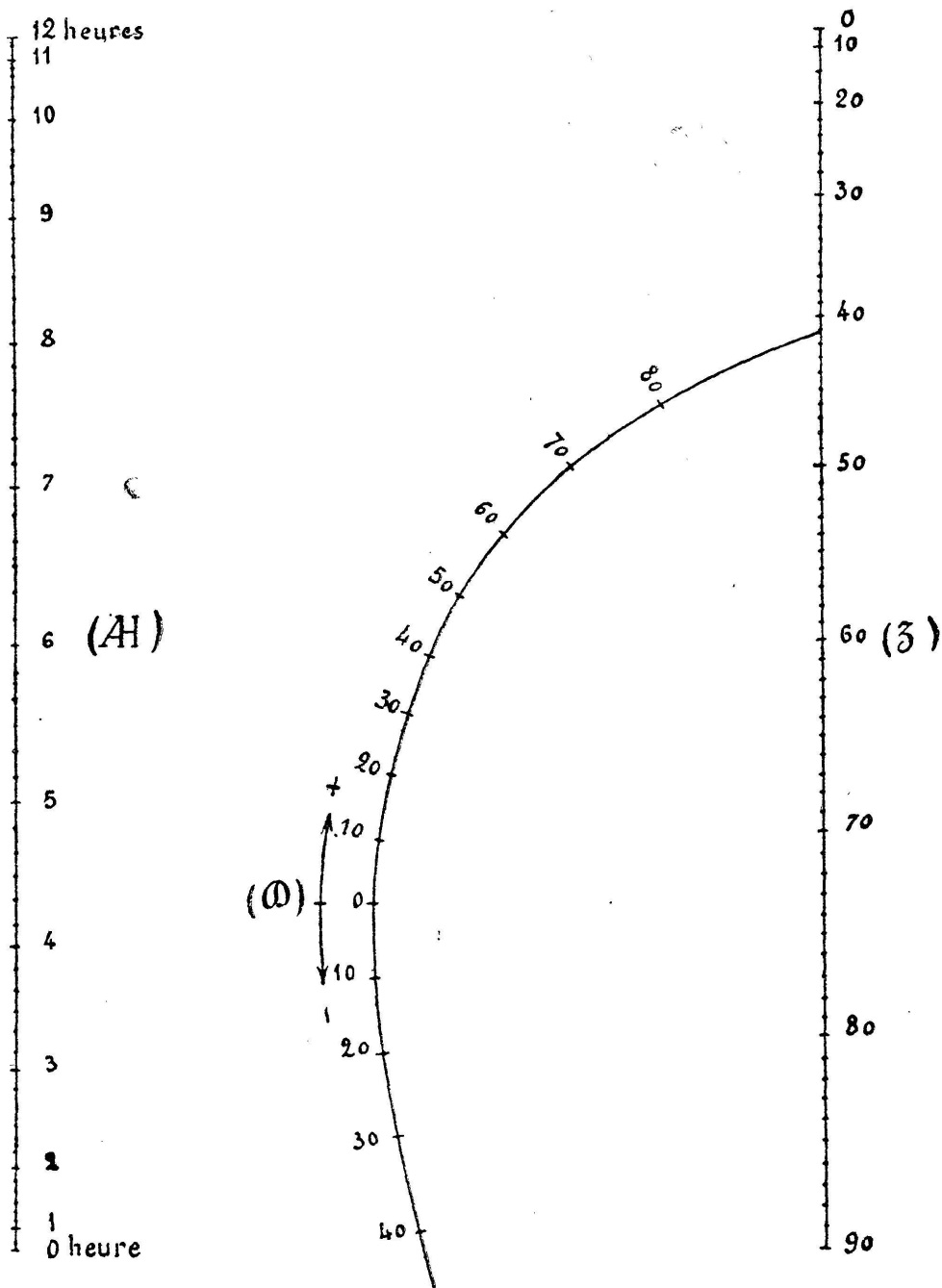


Fig. 16.

et la distance zénithale  $z$  d'un astre quelconque pour une latitude constante  $\varphi$ . Cette relation est fournie par la formule (2) où l'on fait

$$a = z, \quad b = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad c = \frac{\pi}{2} - \mathcal{D}, \quad A = AH.$$

Ici,  $\varphi$  est supposé constant. Il est dès lors suffisant de marquer sur l'ellipse (*b*) correspondant à cette valeur de  $\varphi$ , les points répondant aux diverses valeurs de  $\mathcal{Q}$ , c'est-à-dire les points où les diverses ellipses (*c*) rencontrent cette ellipse (*b*) (fig. 16).

D'ailleurs, AH variant de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  tandis que  $z$  varie seulement de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ , on peut prendre pour cette seconde échelle un module double de celui de la première, de façon à donner à ces échelles des longueurs égales. Cela revient à effectuer une certaine transformation homographique sur la partie qui vient d'être particularisée du nomogramme général de la formule (2). C'est ainsi qu'a été construit le nomogramme représenté par la fig. 16, en vue de la préparation des observations à l'équatorial de l'Observatoire de Paris <sup>1</sup> ( $\varphi = 48^\circ 50' 11''$ ).

---

<sup>1</sup> Au sujet de la construction de ce nomogramme, le lecteur peut consulter une note de l'auteur dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, T. 135, p. 728 (1902).

---