MODULE D'UNE SOMME

Autor(en): **Petrovitch, Michel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17316

MODULE D'UNE SOMME

PAR

Michel Petrovitch (Belgrade, Serbie).

La proposition élémentaire et intuitive, d'après laquelle le module d'une somme Σu_k est au plus égal à la somme de modules des u_k, est fréquemment utilisée dans des démonstrations et dans des calculs approchés. Les propositions aussi intuitives qui suivent, fournissant à la fois des limites inférieures et supérieures du module d'une somme, pourraient également rendre de pareils services.

I. — Soient

$$u_1 = a_1 + ib_1 , \qquad u_2 = a_2 + ib_2 , \qquad u_3 = a_3 + ib_3 , \ldots$$

plusieurs quantités complexes. On a

$$\mathrm{mod}\, \Sigma u_k = \sqrt{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2} ,$$

où P et Q désignent les valeurs absolues de Σa_k et Σb_k.

L'inégalité et l'identité

$$1 \geqq \frac{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2}{(\mathrm{P} + \mathrm{Q})^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{P} - \mathrm{Q}}{\mathrm{P} + \mathrm{Q}}\right)^2$$

font voir que

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2}{(\mathrm{P} + \mathrm{Q})^2} \leqq 1 .$$

Donc: *le module d'une somme* $\Sigma \mathrm{u}_k$ *a pour valeur* $\theta(\mathrm{P} + \mathrm{Q})$, *où* P *désigne la valeur absolue de la somme de parties réelles des* u_k, Q *désigne la valeur absolue de la somme de coeffi-*

cients de i *des* u_k *et* θ *désigne un facteur dont la valeur est toujours comprise entre* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *et* 1.

La limite $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est effectivement atteinte lorsque $P = Q$ et la limite 1 lorsque les u_k sont tous réels, ou bien tous imaginaires.

On voit, par exemple, aussi que

$$\log \operatorname{mod} \Sigma u_k = \log (P + Q) - \delta ,$$

où δ est une quantité positive plus petite que $\frac{1}{2}$ log 2. Si le logarithme est vulgaire, δ est compris entre 0 et 0,15051...; s'il est naturel, δ est compris entre 0 et 0,34657...

Rappelons que lorsque P et Q sont des mêmes signes, la somme $P + Q$ coïncide avec la valeur absolue du coefficient de i de l'expression $(1 + i)\Sigma u_k$, et que, si P et Q sont des signes contraires, cette somme coïncide avec la valeur absolue de la partie réelle de la même expression, comme il résulte de la formule

$$(1 + i)\Sigma u_k = (P - Q) + i(P + Q) .$$

II. — Ce qui précède n'assujettit les qualités u_k à aucune restriction. Supposons maintenant que toutes leurs parties réelles a_k aient un même signe, aussi que tous les coefficients b_k de i, les deux signes pouvant d'ailleurs être quelconques.

En désignant par α_k la valeur absolue de a_k et par β_k la valeur absolue de b_k on aura

$$\operatorname{mod} u_k = \operatorname{mod} (\alpha_k + i\beta_k)$$

et par suite, en vertu de ce qui précède

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_k + \beta_k) \leqq \operatorname{mod} u_k \leqq \alpha_k + \beta_k .$$

Faisons $k = 1, 2, 3, \ldots$ et ajoutons membre à membre les équations ainsi obtenues. En remarquant que les a_k étant tous de même signe, ainsi que les b_k, on aura

$$\Sigma\alpha_k = \text{val. abs. de } \Sigma a_k = P , \qquad \Sigma\beta_k = \text{val. abs. de } \Sigma b_k = Q ;$$

on obtient ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(P + Q) \leqq \Sigma \bmod u_k \leqq P + Q\,,$$

ou encore

$$\Sigma \bmod u_k = \lambda\,(P + Q)\,, \tag{1}$$

avec

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \lambda \leqq 1\,.$$

Le facteur λ atteindra sa valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ limite lorsqu'on a à la fois

$$a_1 = b_1 \qquad a_2 = b_2 \qquad a_3 = b_3\,, \ldots$$

et la limite 1 lorsque dans chaque paire de quantités (a_k, b_k) l'une ou l'autre d'elles est nulle.

En comparant l'équation (1) avec l'équation

$$\bmod \Sigma u_k = \theta(P + Q)\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \theta \leqq 1$$

résultant de ce qui précède, on tire

$$\bmod \Sigma u_k = \frac{\theta}{\lambda}\,\Sigma \bmod u_k\,.$$

Le rapport $\frac{\theta}{\lambda}$ atteindra sa plus petite valeur possible lorsqu'on a à la fois $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lambda = 1$; pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit qu'on ait $P = Q$ et que, de plus, dans chaque paire de quantités (a_k, b_k) l'une ou l'autre soit nulle. Le rapport $\frac{\theta}{\lambda}$ a alors la valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La plus grande valeur du même rapport est d'ailleurs manifestement 1, car on a toujours

$$\bmod \Sigma u_k \leqq \Sigma \bmod u_k\,;$$

cette limite 1 est effectivement atteinte lorsque ou bien tous les a_k à la fois, ou bien tous les b_k à la fois sont nuls (et l'on a alors à la fois $\theta = 1$, $\lambda = 1$).

On arrive ainsi à la proposition suivante:

Lorsque dans une somme Σu_k *les parties réelles des* u_k *sont d'un même signe et qu'en même temps les coefficients de* i *dans les* u_k *ont tous un même signe, on a*

$$\text{mod } \Sigma u_k = \mu \Sigma \text{ mod } u_k$$

où μ *est un facteur dont la valeur est comprise entre* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *et* 1.

La limite $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est effectivement atteinte lorsque chacun des termes u_k est réel ou purement imaginaire, et que, de plus, la somme de termes u_k réels et la somme de coefficients de i des u_k purement imaginaires sont égales en valeurs absolues. La limite $\mu = 1$ est atteinte lorsque les termes u_k sont à la fois *tous* réels ou bien *tous* purement imaginaires.

Remarquons que dans le cas considéré (les a_k et les b_k des mêmes signes respectifs) *la différence entre le logarithme du module d'une somme et le logarithme de la somme de modules est toujours négative et plus petite en valeur absolue que* $\frac{1}{2}$ log 2.

Genève, janvier 1917.