Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

tration *analytique* du *théorème plus général*, dû à H. A. SCHWARZ (*Crelle's Journal*, vol. 63, S. 309-314, et *Gesammelte Abhandlungen*, II, S. 1-7). Cette démonstration est basée sur la théorie des « dyadiques », les « dyadics » de GIBBS-WILSON (*Vectoranalysis*, 1902, chapter V, pp. 260-331)[1]. La seconde partie de notre article est consacrée à une démonstration analytique du théorème de Pohlke, indépendante de la première, et dans laquelle nous nous servons uniquement des éléments du calcul vectoriel. Elle a l'avantage de conduire à des constructions très simples.

I

1. — THÉORÈME DE H. A. SCHWARZ. — *Trois vecteurs non coplanaires connus* $(OR_k) \equiv \mathfrak{R}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ *peuvent toujours, par une projection parallèle, donner trois vecteurs coplanaires, formant une figure semblable à celle de trois vecteurs coplanaires connus* $(O'A_k) \equiv \mathfrak{A}_k$, *pourvu que parmi les quatre points* O', A_1, A_2, A_3 *il n'y en ait pas plus de trois en ligne droite.*

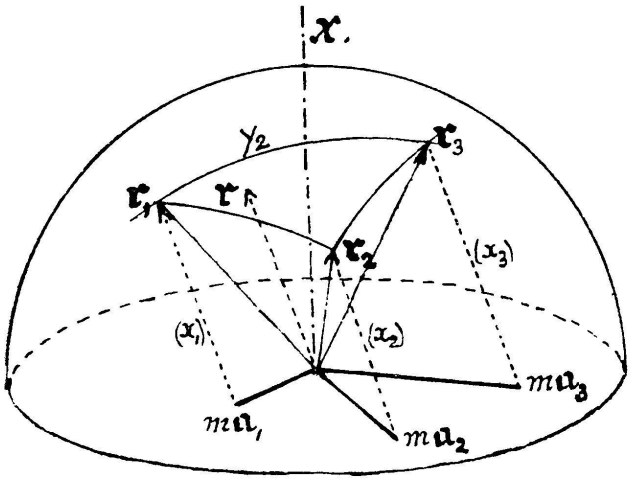

Fig. 1.

Nous pouvons d'abord simplifier le problème. En effet, si les grandeurs des vecteurs connus $\mathfrak{R}_k$ sont R_k, le théorème de Schwarz prétend changer les vecteurs-*unités* non-coplanaires $\mathfrak{R}_k : R_k \equiv \mathfrak{r}_k$ par projection parallèle en trois vecteurs coplanaires formant une configuration semblable à celle des vecteurs connus $\mathfrak{A}_k : R_k \equiv \mathfrak{a}_k$.

---

[1] On peut consulter encore e. a. : C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO : *Omografie vettoriali*, Torino, 1909 ; G. JAUMANN : *Die Grundlagen der Bewegungslehre*, Leipzig, 1905, et E. BUDDE : *Tensoren und Dyaden*, Braunschweig, 1914. La notation employée dans cet article est celle de Gibbs-Wilson sauf pour un point tout à fait secondaire, sur lequel nous revenons.

2. — Supposant le trièdre des $\mathfrak{r}_k$ placé par rapport au plan contenant les $\mathfrak{a}_k$ de manière telle que la projection des $\mathfrak{r}_k$ parallèlement au vecteur-*unité* $\mathfrak{r}$ par des droites de longueurs x_1, x_2, x_3 donne des vecteurs $m\mathfrak{a}_1$, $m\mathfrak{a}_2$, $m\mathfrak{a}_3$, proportionnels aux $\mathfrak{a}_k$, nous obtiendrons un système de *seize* équations scalaires. Or, nous ne connaissons pas la position des trois $\mathfrak{r}_k$ et de $\mathfrak{r}$ par rapport au plan des $\mathfrak{a}_k$; de ce fait il y a *douze* inconnues; les longueurs x_1, x_2, x_3 en forment *trois* autres et m enfin est la *seizième* inconnue. Les équations en question seront, si nous appelons γ_k les angles des vecteurs donnés $\mathfrak{r}_k$:

$$(1)\qquad \begin{array}{lll} \mathfrak{r}_1 - x_1\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{r}_2.\mathfrak{r}_3 = \cos\gamma_1 & \mathfrak{r}_1.\mathfrak{r}_1 = 1 \\ \mathfrak{r}_2 - x_2\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{r}_3.\mathfrak{r}_1 = \cos\gamma_2 & \mathfrak{r}_2.\mathfrak{r}_2 = 1 \qquad \mathfrak{r}.\mathfrak{r} = 1\ . \\ \mathfrak{r}_3 - x_3\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}_3 & \mathfrak{r}_1.\mathfrak{r}_2 = \cos\gamma_3 & \mathfrak{r}_3.\mathfrak{r}_3 = 1 \end{array}$$

3. — Les trois premières équations qui, étant vectorielles, correspondent à *neuf* équations scalaires, peuvent être condensées en l'unique égalité des *dyadiques :*

$$(2)\qquad \Phi \equiv (\mathfrak{r}_1 - x_1\mathfrak{r})\mathfrak{r}_1' + (\mathfrak{r}_2 - x_2\mathfrak{r})\mathfrak{r}_2' + (\mathfrak{r}_3 - x_3\mathfrak{r})\mathfrak{r}_3'$$

$$\text{et}\qquad m\Psi \equiv m(\mathfrak{a}_1\mathfrak{r}_1' + \mathfrak{a}_2\mathfrak{r}_2' + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_3')\ ,$$

dont les « conséquents[1] » sont les vecteurs réciproques $\mathfrak{r}_k'$ correspondant aux vecteurs non-coplanaires donnés $\mathfrak{r}_k$. L'égalité des « conséquents » dans ces dyadiques égales entraîne celle des « antécédents », et comme les « antécédents » $\mathfrak{a}_k$ de la seconde dyadique sont coplanaires, il y a des nombres μ_k tels que la *somme des produits* $\mu_k\mathfrak{a}_k$ *est nulle*. Il en est donc de même pour les trois « antécédents » de la première dyadique, de sorte que :

$$\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3 = (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)\mathfrak{r}\ .$$

---

[1] Les vecteurs réciproques en question satisfont à

$$\mathfrak{r}_1' = \frac{\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3}{[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]}\ ,\qquad \mathfrak{r}_2' = \frac{\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_1}{[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]}\ ,\qquad \mathfrak{r}_3' = \frac{\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2}{[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]}$$

ou $\qquad \mathrm{D}\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3\ ,\qquad \mathrm{D}\mathfrak{r}_2' = \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_1 \ldots$

si nous appelons « le sinus de l'angle trièdre », qui est le produit pseudo-scalaire des valeurs $\mathfrak{r}_k$ par abréviation D. (Gibbs-Wilson, p. 83).

Or, il est facile de choisir les μ_k de manière à faire du premier membre un vecteur-*unité*. Nous trouvons donc, ceci étant fait,

$$\mathfrak{r} = \mu_2 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3 \ , \tag{3}$$

c'est-à-dire *le vecteur indiquant la direction de la projection* dans sa position par rapport au trièdre donné des $\mathfrak{r}_k$, et en outre la relation importante :

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 \equiv \mathfrak{r}.\mathfrak{x} = 1 \ . \tag{4}$$

Dans la dernière équation nous avons introduit le vecteur auxiliaire

$$\mathfrak{x} \equiv x_1 \mathfrak{r}_1' + x_2 \mathfrak{r}_2' + x_3 \mathfrak{r}_3' \ , \tag{5}$$

dont nous allons voir la signification dans un instant.

4. — Il est évident qu'après introduction de « l'idemfacteur I », somme des trois produits indéterminés $\mathfrak{r}_k \mathfrak{r}_k'$, la première dyadique peut s'écrire :

$$\Phi = \mathrm{I} - \mathfrak{r}\mathfrak{x} \ . \tag{6}$$

Pour les doubles produits scalaire et vectoriel de cette dyadique[1], on obtient

$$\Phi^2 \equiv \Phi : \Phi = 1 + \mathfrak{x}.\mathfrak{x} \tag{7}$$

$$2\Phi_2 \equiv \Phi \overset{\times}{\times} \Phi = 2\mathfrak{x}\mathfrak{r} \tag{8}$$

$$\Phi_2^2 \equiv \Phi_2 : \Phi_2 = \mathfrak{x}.\mathfrak{x} \tag{9}$$

---

[1] Les doubles produits scalaire et vectoriel (voir J. Guiot : *Le Calcul vectoriel et ses applications à la Géométrie réglée,* Paris, 1912) correspond au « double dot product » et « double cross product » de Gibbs-Wilson (p. 306-315). Le double produit scalaire de Φ par Φ, *pour lequel nous nous permettons d'écrire ici par abréviation* Φ^2 est :

$$\Phi^2 \equiv \Phi : \Phi = (\mathrm{I} - \mathfrak{r}\mathfrak{x}) : (\mathrm{I} - \mathfrak{r}\mathfrak{x}) \equiv \mathrm{I} : \mathrm{I} - 2\mathfrak{r}\mathfrak{x} : \mathrm{I} + \mathfrak{x}.\mathfrak{x}$$
$$\equiv 3 - 2\mathfrak{r}.\mathfrak{x} + \mathfrak{x}.\mathfrak{x} = 1 + \mathfrak{x}.\mathfrak{x} \ .$$

La moitié du double produit vectoriel de Φ et Φ, que Gibbs-Wilson appelle le « *second* » de Φ est, si $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ sont trois vecteurs-unités trirectangulaires et ξ_1, ξ_2, ξ_3 les grandeurs des composantes de $\mathfrak{x}$ selon ces axes :

$$\Phi_2 \equiv (\mathrm{I} - \mathfrak{r}\mathfrak{x})_2 \equiv \mathrm{I} - \mathfrak{r}\mathfrak{x} \overset{\times}{\times} \mathrm{I} \equiv \mathrm{I} - (\xi_1 \mathfrak{r}\mathfrak{r} + \xi_2 \mathfrak{r}\mathfrak{s} + \xi_3 \mathfrak{r}\mathfrak{t}) \overset{\times}{\times} (\mathfrak{r}\mathfrak{r} + \mathfrak{s}\mathfrak{s} + \mathfrak{t}\mathfrak{t}) =$$
$$\equiv \mathrm{I} - \xi_1 \mathrm{I} + (\xi_1 \mathfrak{r} + \xi_2 \mathfrak{s} + \xi_3 \mathfrak{t})\mathfrak{r} = \mathfrak{x}\mathfrak{r}$$

vu que ξ_1, la grandeur de la protection de $\mathfrak{x}$ sur $\mathfrak{r}$, est égale à l'unité à cause de la relation (4).

et si l'on tient compte de la relation (4), on voit facilement que

$$\mathfrak{x}.\Phi \qquad \text{ou} \qquad m\mathfrak{x}.\Psi$$

est *nul*. Ceci nous montre que le vecteur auxiliaire que nous venons d'introduire est perpendiculaire aux « antécédents » $\mathfrak{a}_k$ de la dyadique *planaire* Ψ ou encore que $\mathfrak{x}$ *est normal au plan des projections*.

5. — Après avoir trouvé le vecteur $\mathfrak{r}$, qui indique la direction de la projection, occupons-nous maintenant du coefficient m. Or, les équations (7) et (9) nous apprennent que

$$\Phi^2 - \Phi_2^2 \qquad \text{ou} \qquad m^2\Psi^2 - m^4\Psi_2^2$$

est égal à l'unité. Nous possédons donc une équation quadratique en m^2, qui nous donne

$$(10) \qquad m^2 = \frac{\Psi^2 + \varepsilon\sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}}{2\Psi_2^2} \equiv \frac{2}{\Psi^2 - \varepsilon\sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}} ,$$

où ε est l'unité positive ou négative. Ces deux valeurs sont réelles; en effet, si nous transformons la dyadique Ψ, en introduisant au lieu des « conséquents » $\mathfrak{r}'_k$ trois vecteurs-unités *trirectangulaires* $\mathfrak{i}_k$, nous aurons

$$(11) \qquad \Psi \equiv \mathfrak{a}_1\mathfrak{r}'_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{r}'_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}'_3 = \mathfrak{B}_1\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{i}_2 + \mathfrak{B}_3\mathfrak{i}_3 ,$$

où les nouveaux « antécédents » $\mathfrak{B}_k$ sont évidemment coplanaires et contenus dans le plan des $\mathfrak{a}_k$. Si les angles de ces antécédents de somme 2π sont β_k, nous aurons par conséquent :

$$\begin{aligned}\Psi^4 - 4\Psi_2^2 &= (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^2 - 4(b_2^2b_3^2\sin^2\beta_1 + b_3^2b_1^2\sin^2\beta_2 + b_1^2b_2^2\sin^2\beta_3)\\ &= b_1^4 + b_2^4 + b_3^4 + 2b_2^2b_3^2\cos 2\beta_1 + 2b_3^2b_1^2\cos 2\beta_2 + 2b_1^2b_2^2\cos 2\beta_3\\ &= (b_1^2\mathfrak{l}_1 + b_2^2\mathfrak{l}_2 + b_3^2\mathfrak{l}_3)^2\end{aligned}$$

pourvu que les $\mathfrak{l}_k$ soient des vecteurs-unités coplanaires, faisant des angles $2\beta_k$. Le dernier membre étant positif, les valeurs (10) trouvées pour m^2 sont réelles.

6. — Nous arrivons maintenant, après avoir déterminé la

direction de la projection $\mathfrak{r}$ et le coefficient de proportionnalité m, au vecteur $\mathfrak{x}$, *normal au plan des projections* $\mathfrak{a}_k$. *Soit* $\mathfrak{c}$ *un vecteur-unité quelconque dans le plan des* $\mathfrak{a}_k$; dans ce cas *son produit scalaire par* $\mathfrak{x}$ *est nul* et on aura [1]:

$$(12) \qquad \mathfrak{c}.(\Phi.\Phi_c.\Phi - \Phi) \qquad \text{ou} \qquad m\mathfrak{c}.(m^2\Psi.\Psi_c.\Psi - \Psi)$$
$$= \mathfrak{x}.\mathfrak{x} \;\; \mathfrak{c}.\mathfrak{r} \;\; (\mathfrak{r} - \mathfrak{x}) .$$

On connaîtra par conséquent en direction *et en grandeur* $\mathfrak{r} - \mathfrak{x}$, donc aussi $\mathfrak{x}$, vu que $\mathfrak{r}$ est déjà connu, *lorsqu'on aura trouvé les deux produits scalaires* $\mathfrak{x}.\mathfrak{x}$ *et* $\mathfrak{r}.\mathfrak{r}$ *du second membre.* Le premier membre en effet dans sa seconde forme est un vecteur connu, dès qu'on aura choisi le vecteur-unité $\mathfrak{c}$ dans le plan des $\mathfrak{a}_k$. Pour arriver aux produits scalaires, nous prenons d'abord la racine positive [2]:

$$\sqrt{(\mathfrak{c}.\Phi)^2 - 1} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{m^2(\mathfrak{c}.\Psi)^2 - 1}$$
$$= |\mathfrak{x}| \; |\mathfrak{c}.\mathfrak{r}| .$$

Ensuite nous nous servons d'un résultat déjà trouvé plus haut au paragraphe 4, résultat qui donne la racine positive:

$$\sqrt{\Phi_2^2} \qquad \text{ou} \qquad m^2\sqrt{\Psi_2^2}$$
$$= |\mathfrak{x}| .$$

La substitution du produit des deux dernières équations dans (12) donne, vu que

$$\mathfrak{c}.\mathfrak{r} = \text{sig}\,(\mathfrak{c}.\mathfrak{r}) \; |\mathfrak{c}.\mathfrak{r}|$$

---

[1] Dans cette expression, Φ_c est la dyadique conjuguée $\mathrm{I} - \mathfrak{x}\mathfrak{x}$; on aura donc en se rappelant que $\mathfrak{c}.\mathfrak{x} = 0$ et $\mathfrak{r}.\mathfrak{x} = 1$:

$$\mathfrak{c}.(\Phi.\Phi_c.\Phi - \Phi) \equiv \mathfrak{c}.(\mathrm{I} - \mathfrak{r}\mathfrak{x}).(\mathrm{I} - \mathfrak{x}\mathfrak{r}).(\mathrm{I} - \mathfrak{r}\mathfrak{x}) - \mathfrak{c}.(\mathrm{I} - \mathfrak{r}\mathfrak{x})$$
$$= \mathfrak{c}.(-\mathfrak{x}\mathfrak{r} + \mathfrak{r}\mathfrak{x} + \mathfrak{r}\mathfrak{r}\,\mathfrak{x}.\mathfrak{x} - \mathfrak{r}\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}.\mathfrak{x}) = \mathfrak{c}.\mathfrak{r} \;\; \mathfrak{x}.\mathfrak{x} \;\; (\mathfrak{r} - \mathfrak{x}) .$$

[2] On a évidemment

$$\sqrt{(\mathfrak{c}.\Phi)^2 - 1} = \sqrt{(\mathfrak{c} - \mathfrak{c}.\mathfrak{r}\,\mathfrak{x})^2 - 1} = \sqrt{(\mathfrak{c}.\mathfrak{r})^2\,\mathfrak{x}.\mathfrak{x}} = |\mathfrak{x}| \; |\mathfrak{c}.\mathfrak{r}| ,$$

vu que $\mathfrak{c}$ est un vecteur-*unité,* dont le produit scalaire par $\mathfrak{x}$ est nul.

pour le vecteur normal au plan des projections l'expression :

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{r} - \frac{\operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{r})\,\mathfrak{c}.(m^2\Psi.\Psi_c - \mathrm{I})\,\Psi}{m\sqrt{\Psi_2^2[m^2(\mathfrak{c}.\Psi)^2 - 1]}} \cdot \tag{13}$$

7. — Il nous faudra examiner encore si l'expression sous le radical du dénominateur est positive. Le double produit scalaire Ψ_2^2 l'est certainement; il suffira donc d'examiner

$$m^2(\mathfrak{c}.\Psi)^2 - 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{2(\mathfrak{c}.\Psi)^2 - \Psi^2 + \varepsilon\sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}}{\Psi^2 - \varepsilon\sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}} ,$$

que nous avons transformé par l'introduction de la valeur (10) du paragraphe 5. Or le dénominateur ici est toujours positif, pour $\varepsilon = +1$ aussi bien que pour $\varepsilon = -1$, tandis que le numérateur

$$2\mathfrak{c}.\Psi.\Psi_c.\mathfrak{c} - \Psi^2 + \varepsilon\sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{c}.(2\Psi.\Psi_c - \Psi^2\mathrm{I}).\mathfrak{c} + \varepsilon\sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}$$

par l'introduction d'un *vecteur auxiliaire*[1]

$$\mathfrak{c}.(2\Psi.\Psi_c - \Psi^2\mathrm{I}) \equiv \mathfrak{l} \qquad (l^2 = \Psi^4 - 4\Psi_2^2) \cdot \tag{14}$$

peut prendre la forme

$$\mathfrak{l}.\mathfrak{c} + \varepsilon l \cdot$$

Cette somme n'est positive que pour $\varepsilon = +1$, car la valeur absolue l est supérieure au premier terme, qui n'est que la projection de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{c}$. Nous arrivons donc à la conclusion, que $\mathfrak{x}$ n'est réel que lorsque $\varepsilon = +1$, c'est-à-dire lorsque

$$m^2 = \frac{2}{\Psi^2 - \sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}} \equiv \frac{2}{\Psi^2 - l} \cdot \tag{15}$$

8. — Une autre question qui se pose est celle-ci : le second terme dans l'expression (13) trouvée pour $\mathfrak{x}$ dépend-il ou ne dépend-il pas du vecteur-unité $\mathfrak{c}$?

---

[1] On démontre au § 14 que le carré du vecteur auxiliaire $\mathfrak{l}$ est en effet $\Psi^4 - 4\Psi_2^2$.

Introduisant successivement la valeur de m^2 d'après (10) et le vecteur auxiliaire $\mathfrak{l}$ nous pouvons l'écrire :

$$(16)\qquad \frac{\operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{x})}{m\sqrt{\Psi_2^2}}\cdot\frac{\mathfrak{c}(m^2\Psi.\Psi_c-\mathrm{I})\Psi}{\sqrt{m^2(\mathfrak{c}.\Psi)^2-1}}=\frac{\operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{x})}{\sqrt{2\Psi_2^2}}\cdot\frac{\mathfrak{c}.(2\Psi.\Psi_c-\Psi^2.\mathrm{I}+l\mathrm{I}).\Psi}{\sqrt{\mathfrak{c}.(2\Psi.\Psi_c-\Psi^2\mathrm{I}).\mathfrak{c}+l}}$$

$$=\frac{\operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{x})}{\sqrt{2\Psi_2^2}}\cdot\frac{(\mathfrak{l}+l\mathfrak{c}).\Psi}{\sqrt{\mathfrak{l}.\mathfrak{c}+l}}\ .$$

Or, les vecteurs $\mathfrak{l}$ et $l\mathfrak{c}$ ont la même grandeur l; leur somme est par conséquent un vecteur dirigé selon leur bissectrice et si nous nommons un vecteur-unité dans la direction de cette bissectrice $\mathfrak{l}'$, le numérateur peut s'écrire

$$\operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{x}).2l\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{c},\ \mathfrak{l})\ \ \mathfrak{l}'.\Psi$$

tandis que le dénominateur prend facilement la forme :

$$\sqrt{4l\Psi_2^2}.\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{c},\ \mathfrak{l})\ .$$

C'est ainsi que nous sommes amenés à l'expression

$$(17)\qquad \operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{x})\sqrt{\frac{l}{\Psi_2^2}}\ \mathfrak{l}'.\Psi\ .$$

On démontre maintenant sans peine (voir § 15) qu'à toute rotation θ du vecteur $\mathfrak{c}$ dans le plan des $\mathfrak{a}_k$ correspond une rotation $-\theta$ du vecteur $\mathfrak{l}$ dans le même plan, ce qui nous fait conclure que *le vecteur-unité* $\mathfrak{l}'$, *selon leur bissectrice, ne change pas et est indépendant du vecteur* $\mathfrak{c}$. Quant au $\operatorname{sig}(\mathfrak{c}.\mathfrak{x})$, il est évident qu'il peut être aussi bien positif que négatif, vu que $\mathfrak{c}$ est un vecteur-unité tout à fait arbitraire dans le plan des $\mathfrak{a}_k$. La *direction* seule de $\mathfrak{x}$ nous intéresse et celle-ci ne change pas lorsque, multipliant par $\sqrt{\Psi_2^2}$, nous écrivrons

$$(18)\qquad \mathfrak{x}=\sqrt{\Psi_2^2}\ \mathfrak{x}\pm\sqrt{l}\ \mathfrak{l}'.\Psi\ .$$

9. — Nous avons donc fixé *par rapport au trièdre des* $\mathfrak{x}_k$ d'abord la direction de la projection par (3), et ensuite le

vecteur normal [1] au plan des projections par (18). L'équation (10) nous fait connaître le coefficient de proportionnalité. Les deux signes dans l'expression (18) nous démontrent que le problème admet en général deux solutions, et comme les deux vecteurs du second membre sont rectangulaires, vu que leur produit scalaire

$$\begin{aligned}\mathfrak{l}'.\Psi.\mathfrak{r} &\equiv \mathfrak{l}'.(\mathfrak{a}_1\mathfrak{r}'_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{r}'_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}'_3).(\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3)\\ &\equiv \mathfrak{l}'.(\mu_1\mathfrak{a}_1 + \mu_2\mathfrak{a}_2 + \mu_3\mathfrak{a}_3)\end{aligned}$$

est nul, *les deux* $\mathfrak{x}$ *sont symétriques par rapport au vecteur* $\mathfrak{r}$.

10. — Les deux solutions n'en forment qu'une, lorsque l est nul, c'est-à-dire lorsque

$$(20)\qquad \Psi^4 = 4\Psi_2^2 \qquad \text{ou} \qquad (\Psi : \Psi)^2 = (\Psi \overset{x}{\underset{x}{}} \Psi) : (\Psi \overset{x}{\underset{x}{}} \Psi)\ .$$

Dans ce cas, la direction de la projection $\mathfrak{r}$ coïncide avec celle de la normale $\mathfrak{x}$: la projection est *orthogonale.*

11. — La solution-limite se présente lorsque m^2 devient infini, c'est-à-dire (10) lorsque

$$(21)\qquad D^2.\Psi_2^2 \equiv (a_2a_3 \sin\alpha_1\,\mathfrak{r}_1 + a_3a_1 \sin\alpha_2\,\mathfrak{r}_2 + a_1a_2 \sin\alpha_3\,\mathfrak{r}_3)^2$$

s'annule [2]. Ceci implique la disparition de chacun des trois termes :

$$a_2a_3 \sin\alpha_1\ , \qquad a_3a_1 \sin\alpha_2\ , \qquad a_1a_2 \sin\alpha_3\ ,$$

ce qui ne se réalise que lorsque les trois vecteurs $\mathfrak{a}_k$ sont portés par la même droite.

12. — Les expressions trouvées $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{x}$, l^2 et m^2 contiennent les constantes μ_k, les doubles produits scalaires $\Psi^2 \equiv \Psi : \Psi$

---

[1] Lorsqu'il s'agit d'exprimer $\mathfrak{x}$ en fonction des $\mathfrak{r}_k$, il suffira de multiplier par l'idemfacteur et d'écrire :

$$(19)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{x} &= \sqrt{\Psi_2^2}(\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3)\\ &\pm \sqrt{l}\,(\mathfrak{l}'.\Psi.\mathfrak{r}'_1\ \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{l}'.\Psi.\mathfrak{r}'_2\ \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{l}'.\Psi.\mathfrak{r}'_3\ \mathfrak{r}_3)\ .\end{aligned}$$

[2] Le « second » Ψ_2 est

$$\mathfrak{n}(a_2a_3 \sin\alpha_1\ \mathfrak{r}'_2 \times \mathfrak{r}'_3 + a_3a_1 \sin\alpha_2\ \mathfrak{r}'_3 \times \mathfrak{r}'_1 + a_1a_2 \sin\alpha_1\ \mathfrak{r}'_1 \times \mathfrak{r}'_2)$$

ou $\dfrac{1}{D}\mathfrak{n}(a_2a_3 \sin\alpha_1\ \mathfrak{r}_1 + a_3a_1 \sin\alpha_2\ \mathfrak{r}_2 + a_1a_2 \sin\alpha_3\ \mathfrak{r}_3)$ lorsque $\mathfrak{n}$ est un vecteur-unité dans la direction commune des produits vectoriels $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{a}_1$, et $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$.

et $\Psi_2^2 \equiv \Psi_2 : \Psi_2$ et le vecteur-unité $\mathfrak{k}'$. Il est facile de les écrire en fonction des vecteurs donnés $\mathfrak{a}_k$, de leurs angles α_k, et des éléments du trièdre connu des $\mathfrak{r}_k$, qui sont les côtés γ_k et les angles extérieurs Γ_k du triangle sphérique correspondant.

a) Nous avons en effet pour le premier des doubles produits scalaires [1] :

$$D^2\Psi^2 \equiv D^2(\mathfrak{a}_1.\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{r}_1.\mathfrak{r}_1' + \mathfrak{a}_2.\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{r}_2'.\mathfrak{r}_2' + \ldots\ 2\mathfrak{a}_2.\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{r}_2'.\mathfrak{r}_3' + \ldots)$$

$$= a_1^2 \sin^2\gamma_1 + a_2^2 \sin^2\gamma_2 + a_3^2 \sin\gamma_3 + 2a_2 a_3 \cos\alpha_1 . \sin\gamma_2 \sin\gamma_3 \cos\Gamma_1 + \ldots).$$

b) La valeur du second des produits scalaires a été trouvée par (21). Elle est :

$$D^2\Psi_2^2 = (a_2 a_3 \sin\alpha_1\ \mathfrak{r}_1 + a_3 a_1 \sin\alpha_2\ \mathfrak{r}_2 + a_1 a_2 \sin\alpha_3\ \mathfrak{r}_3)^2$$

$$= a_2^2 a_3^2 \sin^2\alpha_1 + a_3^2 a_1^2 \sin^2\alpha_2 + a_1^2 a_2^2 \sin^2\alpha_3 + 2a_1^2 a_2 a_3 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\Gamma_1 + \ldots$$

c) On obtient pour les constantes μ_k en formant les produits *vectoriels* des $\mathfrak{a}_k$ par la somme des $\mu_k \mathfrak{a}_k$ qui est nulle, d'abord :

$$\frac{a_2 a_3 \sin\alpha_1}{\mu_1} = \frac{a_3 a_1 \sin\alpha_2}{\mu_2} = \frac{a_1 a_2 \sin\alpha_3}{\mu_3} \equiv \rho\ ,$$

et ensuite à cause de (21)

$$\rho^2 = \rho^2(\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3)^2 = (a_2 a_3 \sin\alpha_1\,\mathfrak{r}_1 + a_3 a_1 \sin\alpha_2\,\mathfrak{r}_2 + a_1 a_2 \sin\alpha_3\,\mathfrak{r}_3)^2$$

$$= D^2\Psi_2^2\ .$$

Les trois constantes en question sont donc

$$(22) \qquad \mu_1 = \frac{a_2 a_3 \sin\alpha_1}{D\sqrt{\Psi_2^2}}\ , \quad \mu_2 = \frac{a_3 a_1 \sin\alpha_2}{D\sqrt{\Psi_2^2}}\ , \quad \mu_3 = \frac{a_1 a_2 \sin\alpha_3}{D\sqrt{\Psi_2^2}}\ .$$

---

[1] Les expressions trouvées pour Ψ^2 et Ψ_2^2 peuvent être simplifiées par l'introduction des formes quadratiques

$$\omega(x_1 x_2 x_3) \equiv \omega_{11}x_1^2 + \omega_{22}x_2^2 + \omega_{33}x_3^2 + 2\omega_{12}x_1x_2 + 2\omega_{23}x_2x_3 + 2\omega_{31}x_3x_1\ ,$$

et $\Omega(u_1 u_2 u_3) \equiv \Omega_{11}u_1^2 + \Omega_{22}u_2^2 + \ldots\ 2\Omega_{23}u_2u_3 + \ldots$ où $\omega_{ik} \equiv \cos\gamma_{ik}$ et $\Omega_{ki} \equiv \sin\gamma_i \sin\gamma_k \cos\Gamma_{ik}$ (voir M. Fr. Daniëls, *Essai de Géométrie sphérique en coordonnées projectives*, Fribourg, Suisse, 1907).

d) La seconde partie de $\mathfrak{x}$ possède dans la direction $\mathfrak{r}_1$ une composante, dont la grandeur se trouve d'après (19, 17, 16) facilement :

$$(23)\qquad \sqrt{l}\,.\,\mathfrak{l}'\,.\,\Psi\,.\,\mathfrak{r}_1' \quad \text{ou} \quad \mathfrak{c}\,.\,(m^2\Psi\,.\,\Psi_c - \mathrm{I})\,.\,\Psi\;\mathfrak{r}_1'\big/ m\sqrt{m^2(\mathfrak{c}\,.\,\Psi)^2 - 1}\;,$$

où $\mathfrak{c}$ est un vecteur-unité dans le plan des $\mathfrak{a}_k$, *pour lequel nous voulons prendre un vecteur-unité dans la direction* $\mathfrak{a}_1$. La substitution ne présente aucune difficulté, mais elle conduit à des résultats plutôt longs, qui font bien apprécier l'extrême concision résultant de l'emploi des dyadiques. Nous trouvons pour les différentes parties dont se compose notre expression (23), si nous posons par abréviation $\sin\gamma_k \equiv s_k$, $\cos\gamma_k \equiv c_k$ et $\cos\Gamma_k \equiv \mathrm{C}_k$, successivement

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}\,.\,\Psi &= a_1\mathfrak{r}_1' + a_2\cos\alpha_3\,\mathfrak{r}_2' + a_3\cos\alpha_2\,\mathfrak{r}_3'\\
\mathfrak{c}\,.\,\Psi\,.\,\Psi_c &= (a_1\mathfrak{r}_1' + a_2\cos\alpha_3\,\mathfrak{r}_2' + a_3\cos\alpha_2\,\mathfrak{r}_3')\,.\,(\mathfrak{r}_1'\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{r}_2'\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{r}_3'\mathfrak{a}_3)\\
\mathrm{D}^2\mathfrak{c}\,.\,\Psi\,.\,\Psi_c &= (a_1 s_1^2 + a_2\cos\alpha_3\,.\,s_2 s_1\,\mathrm{C}_3 + a_3\cos\alpha_2\,.\,s_3 s_1\,\mathrm{C}_2)\,\mathfrak{a}_1 + \ldots\\
&\equiv m_1\mathfrak{a}_1 + m_2\mathfrak{a}_2 + m_3\mathfrak{a}_3\\
\mathrm{D}^2\Psi\,.\,\mathfrak{r}_1' &= s_1^2\mathfrak{a}_1 + s_2 s_1\,\mathrm{C}_3\,\mathfrak{a}_2 + s_3 s_1\,\mathrm{C}_2\,\mathfrak{a}_3 \equiv n\,\mathfrak{a}_1 + n_2\mathfrak{a}_2 + n_3\mathfrak{a}_3\\
\mathrm{D}^4\mathfrak{c}\,.\,\Psi\,.\,\Psi_c\,.\,\Psi\,.\,\mathfrak{r}_1' &= m_1 n_1 a_1^2 + m_2 n_2 a_2^2 + m_3 n_3 a_3^2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)a_1 a_2\cos\alpha_3 + \ldots\\
\mathrm{D}^2(\mathfrak{c}\,.\,\Psi)^2 &= a_1^2 s_1^2 + a_2^2\cos^2\alpha_3\,.\,s_2^2 + a_3^2\cos^2\alpha_2\;s_3^2 + 2a_1 a_2\cos\alpha_3\,.\,s_1 s_2\,\mathrm{C}_3 + \ldots\\
\mathrm{D}^2\mathfrak{c}\,.\,\Psi\,.\,\mathfrak{r}_1' &= a_1 s_1^2 + a_2\cos\alpha_3\,.\,s_2 s_1\,\mathrm{C}_3 + a_3\cos\alpha_2\,.\,s_3 s_1\,\mathrm{C}_2\;.
\end{aligned}$$

13. — Les formules précédentes se simplifient beaucoup, lorsque les $\mathfrak{r}_k$ forment un trièdre *trirectangulaire*, comme c'est le cas dans le *théorème de Pohlke*. Nous avons alors en effet :

$$\mathrm{D} = 1\;;\qquad s_k = 1\;;\qquad c_k = 0\;;\qquad \mathrm{C}_k = 0$$

$$\Psi^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\;;\quad \Psi_2^2 = a_2^2 a_3^2\sin^2\alpha_1 + a_3^2 a_1^2\sin^2\alpha_2 + a_1^2 a_1^2\sin^2\alpha_3\;,\ \text{etc.}$$

Nous revenons sur ce cas dans la seconde partie de notre travail.

14. — Il nous reste encore à démontrer que le carré du vecteur auxiliaire $2\mathfrak{c}\,.\,\Psi\,.\,\Psi_c - \Psi^2\mathfrak{c}$ introduit au paragraphe 7 est bien $\Psi^4 - 4\Psi_2^2$, autrement dit, qu'un vecteur-unité $\mathfrak{c}$

situé dans le plan des antécédents de la dyadique planaire Ψ satisfait à l'équation :

$$\mathfrak{c}.\Psi.\Psi_c.\Psi.\Psi_c.\mathfrak{c} - \Psi^2\mathfrak{c}.\Psi.\Psi_c.\mathfrak{c} + \Psi_2^2 \equiv \mathfrak{c}.(\Psi.\Psi_c.\Psi.\Psi_c - \Psi^2\Psi.\Psi_c + \Psi_2^2 I).\mathfrak{c} = 0 \ .$$

Nous formulons à ce propos un théorème plus général : Si Ψ est une dyadique planaire de la forme

$$\Psi \equiv \mathfrak{a}_1\mathfrak{r}'_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{r}'_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}'_3 \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{b}_1\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{i}_2 + \mathfrak{b}_3\mathfrak{i}_3$$

on aura toujours

$$(24) \qquad \mathfrak{A}.(\Psi.\Psi_c.\Psi.\Psi_c - \Psi^2\Psi.\Psi_c + \Psi_2^2 I).\mathfrak{B} = 0$$

pourvu qu'un des vecteurs $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ au moins soit dans le plan des « antécédents » coplanaires.

Voici une esquisse de la démonstration. Appelons Ω la dyadique entre parenthèses (24) et cherchons d'abord en nous servant de la seconde forme pour Ψ, la direction de $\mathfrak{b}_2$ étant supposée différente de celle de $\mathfrak{b}_1$, les vecteurs

$$\Omega.\mathfrak{b}_1 \ , \qquad \Omega.\mathfrak{b}_2 \ , \qquad \Omega.\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2 = \Psi_2^2\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2 \ .$$

Multiplions-les scalairement une première fois par $\mathfrak{b}_1$, une seconde fois par $\mathfrak{b}_2$. Les six produits obtenus seront tous nuls. Nous en concluons que

$$(u_1\mathfrak{b}_1 + u_2\mathfrak{b}_2 + u_3\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2).\Omega.(v_1\mathfrak{b}_1 + v_2\mathfrak{b}_2 + v_3\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2) = u_3v_3.\Psi_2^2.(\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)^2 \ .$$

Or ceci ne disparaît que lorsqu'un des coefficients u_3 ou v_3 est égal à zéro, c'est-à-dire lorsqu'un des vecteurs terminaux au moins est dans le plan des « antécédents » coplanaires $\mathfrak{b}_k$. c. f. d.

15. — En dernier lieu il nous faudra montrer (§ 8) qu'une rotation θ du vecteur $\mathfrak{c}$ dans le plan des « antécédents » $\mathfrak{a}_k$ ou $\mathfrak{b}_k$ produit une rotation $-\theta$ dans le même plan du vecteur-auxiliaire :

$$(25) \qquad \mathfrak{l} \equiv \mathfrak{c}.(2\Psi.\Psi_c - \Psi^2 I) \equiv \mathfrak{c}.\Sigma \ .$$

La dyadique Σ que nous venons d'introduire n'est pas

seulement *planaire* [1] et *auto-conjuguée*, elle satisfait [2] encore à $\mathfrak{i}.\Sigma.\mathfrak{i} + \mathfrak{j}.\Sigma.\mathfrak{j} = 0$, si $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$ sont deux vecteurs-unités rectangulaires dans le plan de $\mathfrak{B}_k$. Ces trois propriétés nous permettent de dire que dans la dyadique écrite comme *nonion*, les neuf coefficients étant $c_{ik}(i, k = 1, 2, 3)$ nous avons d'abord $c_{13} = c_{23} = c_{33} = 0$, ensuite $c_{12} = c_{21}$ et enfin $c_{11} + c_{22} = 0$, donc

$$\Sigma = c_{11}(\mathfrak{ii} - \mathfrak{jj}) + c_{12}(\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji}) \; . \tag{26}$$

D'autre part, les dyadiques conjuguées qui, employées comme « préfacteurs », produisent les rotations θ et $-\theta$ dans le plan des $\mathfrak{B}_k$ sont [3] :

$$\Delta \equiv \cos\theta\, \mathrm{I} + \sin\theta(\mathfrak{ji} - \mathfrak{ij}) \quad \text{et} \quad \Delta_c = \cos\theta\, \mathrm{I} - \sin\theta(\mathfrak{ji} - \mathfrak{ij}) \; . \tag{27}$$

En les multipliant par Σ nous trouvons sans peine

$$\Sigma.\Delta = \Delta_c.\Sigma \; . \tag{28}$$

Si donc nous appelons $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{k}$ les vecteurs en question *avant* et $\Delta.\mathfrak{c}$ et $\bar{\mathfrak{k}}$ *après* la rotation, nous aurons, conformément à la définition (25) de $\mathfrak{k}$ et à cause de l'égalité (28) :

$$\bar{\mathfrak{k}} = (\Delta.\mathfrak{c}).\Sigma = \mathfrak{c}.\Delta_c.\Sigma = (\mathfrak{c}.\Sigma).\Delta = \mathfrak{k}.\Delta = \Delta_c.\mathfrak{k}$$

ce qui nous prouve que le nouveau vecteur $\bar{\mathfrak{k}}$ est obtenu par une rotation $-\theta$ du vecteur $\mathfrak{k}$. q. e. d.

---

[1] Comme Σ n'opère que sur des vecteurs dans le plan des $\mathfrak{B}_k$, nous pouvons remplacer l'idemfacteur par $\mathfrak{ii} + \mathfrak{jj}$.

[2] On a en effet

$$\mathfrak{i}.\Sigma.\mathfrak{i} + \mathfrak{j}.\Sigma.\mathfrak{j} = 2(\mathfrak{B}_1.\mathfrak{i})^2 + 2(\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{i})^2 + 2(\mathfrak{B}_3.\mathfrak{i})^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2$$
$$+ 2(\mathfrak{B}_1.\mathfrak{j})^2 + 2(\mathfrak{B}_2.\mathfrak{j})^2 + 2(\mathfrak{B}_3.\mathfrak{j})^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 0 \; .$$

[3] On a en effet

$$\Delta.(z_1\mathfrak{i} + z_2\mathfrak{j}) = z_1\Delta.\mathfrak{i} + z_2\Delta.\mathfrak{j} = z_1(\mathfrak{i}\cos\theta + \mathfrak{j}\sin\theta) + z_2(-\mathfrak{i}\sin\theta + \mathfrak{j}\cos\theta)$$
$$\equiv z_1\mathfrak{i}' + z_2\mathfrak{j}' \; ,$$

les vecteurs-unités $\mathfrak{i}'$ et $\mathfrak{j}'$ faisant un angle θ avec $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$.