éléments de l'Arithmogéométrie.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

1. — J'ai réuni, dans le présent travail, quelques remarques bien simples dont l'ensemble constitue la première étude systématique de la géométrie élémentaire des nombres rationnels. Dans ce premier article, j'ai cru devoir me borner aux seules figures qui sont en étroite connexion avec le cercle ou la sphère, réservant d'autres recherches pour un Mémoire ultérieur qui sera consacré aux arithmoconiques (c'est-à-dire à l'étude géométrique des équations indéterminées du genre de celles de Brahmagupta et Fermat) et aux courbes d'ordre supérieur.

Les arithmotriangles héroniens occupent dans ce travail une place importante. J'ai pensé, en effet, que ces triangles qui possédent un grand nombre de lignes rationnelles et dont la détermination a jusqu'ici donné lieu à quelques recherches isolées méritaient d'être étudiés d'une manière beaucoup plus approfondie.

Les éléments de l'Arithmogéométrie.

2. — Qu'il s'agisse du plan ou de l'espace, j'appellerai *point rationnel* ou *arithmopoint* tout point dont les coordonnées cartésiennes rectangulaires sont des nombres rationnels. Sur une droite quelconque, il peut y avoir, selon les cas, zéro point rationnel, un point rationnel ou une infinité de points rationnels; c'est ce que prouvent les trois exemples suivants de droites représentées par les équations respectives :

$$x = \pi , \qquad x = y\sqrt{2} , \qquad x = 3y .$$

Dès qu'il existe, sur une droite, un couple d'arithmopoints distincts, il existe une infinité de points de cette nature sur la droite : ce sont les points qui divisent rationnellement, en un rapport arbitraire, le segment défini par les deux premiers points rationnels. Il n'y a d'ailleurs, sur cette même droite, pas d'autre arithmopoint que ceux obtenus par le procédé précédent. Je dirai, dans le cas d'une droite de cette nature, que c'est une *arithmodroite*.

En géométrie plane, l'équation d'une arithmodroite générale est de la forme $ax + by + c = 0$, a, b, c étant des nombres algébriques arbitraires mais rationnels ; cette même arithmodroite peut aussi être représentée par un système de deux équations linéaires à coefficients rationnels.

Parmi les arithmodroites du plan, celles pour lesquelles l'expression $a^2 + b^2$ est le carré d'un nombre rationnel présentent une importance toute spéciale (c. f. le problème des distances rationnelles, § 18). Je les désignerai donc par la dénomination d'*arithmodirigée*. Ces arithmodirigées jouissent de propriétés simples qu'il est utile de mentionner :

La distance de deux arithmopoints quelconques d'une arithmodirigée est mesurée par un nombre rationnel. Réciproquement, *si la distance de deux arithmopoints particuliers d'une arithmodroite est rationnelle, il en est de même de tout autre couple d'arithmopoints de cette arithmodroite, qui est dès lors une arithmodirigée.*

La distance de tout arithmopoint du plan à une arithmodirigée est rationnelle. Réciproquement, *si la distance d'un arithmopoint particulier du plan à une arithmodroite est rationnelle et non nulle, il en est de même de tout arithmopoint du plan et l'arithmodroite considérée est une arithmodirigée.*

Cette propriété place les arithmodirigées parmi les *courbes de direction* du plan qui jouissent, on le sait, de la propriété caractéristique de décomposition en deux équations rationnelles de l'équation de chacune de leurs courbes parallèles. D'après ce qui vient d'être écrit, le lieu des points du plan qui sont à une distance rationnelle donnée d'une arithmodroite se compose de deux droites parallèles dont les deux équations ne se séparent pas en général, sous le point de vue des nombres rationnels. Cette distinction est caractéristique des arithmodirigées.

Les nombres trigonométriques de l'angle formé par deux arithmodirigées sont tous rationnels ; la tangente trigonométrique de la moitié de cet angle est rationnelle. Il en résulte que la représentation la plus générale d'une arithmodirigée est

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi \ ,$$

$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ étant un nombre rationnel t, ainsi que la distance ϖ à l'origine O des coordonnées rectangulaires (Ox, Oy) ; on peut encore poser

$$x = u \, . \cos \varphi + a \ ,$$

$$y = v \, . \sin \varphi + b \ ,$$

a, b, $\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$ étant des nombres rationnels donnés et u étant un paramètre rationnel.

En ce qui concerne le plan, il y aura sur lui zéro point rationnel, un point rationnel, une infinité de points rationnels alignés (sur une arithmodroite) ou enfin une infinité d'arithmopoints non alignés. Dès qu'il existe, en effet, un couple d'arithmopoints dans un plan, il en existe une infinité : ceux de l'arithmodroite qui joint les deux premiers. S'il existe trois arithmopoints, sommets d'un véritable triangle, il en existe une infinité : ce sont les centres des distances proportionnelles des trois premiers, respectivement affectés de coefficients algébriques rationnels et absolument arbitraires. Je dirai que, dans ce dernier cas, le plan, qui contient une infinité d'arithmodroites, est un *arithmoplan*.

D'une manière générale, j'appellerai *arithmocourbe,* en géométrie plane ou en géométrie spatiale indifféremment, toute courbe qui satisfera aux conditions simultanées suivantes :

a) la courbe est algébrique et unicursale ;

b) les coefficients des polynomes constitutifs des fractions rationnelles qui expriment rationnellement et paramétriquement les coordonnées cartésiennes d'un point courant de cette courbe sont des nombres rationnels.

Dans ces conditions, une arithmocourbe admet une infinité d'arithmopoints : ce sont tous ceux qui correspondent aux valeurs rationnelles des paramètres de représentation. Réciproquement, tout arithmopoint d'une arithmocourbe correspond à une valeur rationnelle du paramètre.

Une surface algébrique sera de même appelée une *arithmosurface* si elle est susceptible d'être représentée par trois fonctions rationnelles de deux paramètres, tous les coefficients étant des nombres rationnels. A chaque couple de valeurs rationnelles de deux paramètres de représentation, correspond un arithmopoint de la surface. Mais il conviendra essentiellement de s'assurer, dans le cas d'une surface, que, réciproquement, les formules adoptées représentent l'arithmopoint le plus général de la surface étudiée. Les exemples (examinés au § 8) de la représentation géographique (représentation impropre) et de la représentation stéréographique (représentation propre) de l'arithmosphère à rayon rationnel montrent suffisamment l'intérêt qu'il y aura à mettre en évidence des représentations propres des arithmosurfaces.

3. — ARITHMOCERCLE. Un cercle quelconque peut n'avoir aucun point rationnel, ou bien en posséder un seul, deux ou une infinité. Dès qu'il en possède trois, en effet, il en possède une infinité : c'est alors un cercle que nous nommerons un *arithmocercle*.

L'équation d'un arithmocercle a nécessairement tous les coefficients de son équation rationnels, puisque ces coefficients satisfont à trois équations linéaires rationnelles. *Le centre d'un arithmocercle est donc toujours un arithmopoint du plan :* on pourra l'appeler l'*arithmocentre.* Il est important d'observer, en vue des applications, que, réciproquement, *un cercle à équation rationnelle et qui possède en outre un arithmopoint est nécessairement un arithmocercle.* L'arithmopoint courant d'un tel arithmocercle s'obtient comme intersection de l'arithmocercle avec une arithmodroite quelconque pivotant autour de l'arithmopoint connu a priori.

4. — ARITHMOCERCLE A RAYON RATIONNEL. ARITHMOTRIANGLES PYTHAGORIQUES. La représentation d'un arithmocercle à rayon rationnel est immédiate ; l'équation d'un tel arithmocercle étant

$$x^2 + y^2 = R^2 ,$$

il suffit d'introduire comme paramètre de représentation la tangente trigonométrique de la moitié de l'azimut

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = t$$

et de poser

$$x = R \cos \theta , \qquad y = R \sin \theta ,$$

pour avoir la représentation générale désirée de l'arithmopoint courant de cet arithmocercle :

$$x = \frac{R(1 - t^2)}{1 + t^2} , \qquad y = \frac{2Rt}{1 + t^2} .$$

A cette théorie des arithmocercles à rayon rationnel est intimement liée celle des *arithmotriangles pythagoriques.* Nous désignerons sous cette dernière dénomination ceux des triangles rectangles dont les trois côtés sont mesurés par des nombres rationnels ; ils sont semblables, et dans des rapports rationnels de similitude, aux triangles pythagoriques proprement dits, c'est-à-dire à ceux des triangles rectangles à côtés entiers.

L'arithmotriangle pythagorique est susceptible d'être représenté par un arithmopoint quelconque d'un arithmocercle à rayon rationnel. Les formules de correspondance entre l'hypoténuse a, les cathètes b et c d'un tel arithmotriangle pythagorique et les coordonnées de l'arithmopoint sont

$$a = R , \qquad b = x , \qquad c = y .$$

C'est à cette même considération des arithmocercles à rayon rationnel que se rattache la représentation déjà indiquée au § 2 des arithmodirigées.

5. — ARITHMOCERCLE QUELCONQUE. Il s'agit de décomposer un nombre rationnel ρ en une somme de carrés de deux

nombres rationnels x et y. Le cas où ρ est lui-même un carré parfait vient d'être traité; tout facteur entier carré de l'un des deux termes de la fraction ρ pouvant être absorbé dans x et y, nous devons nous borner au seul cas où les deux termes de la fraction irréductible ρ sont à facteurs simples.

Les identités

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \equiv (x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2) ,$$

$$\left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2} ,$$

permettent en outre de réduire l'étude de la décomposition en deux carrés d'un nombre rationnel ρ au cas particulier où ρ est entier, puisqu'elles expriment que le produit ou le quotient de deux nombres ρ_1, ρ_2 décomposables en deux carrés sont de la même nature.

Etant donné le nombre rationnel ρ, on devra donc considérer les facteurs premiers de son dénominateur et de son numérateur, après suppression des facteurs qui interviennent au carré. La condition nécessaire et suffisante pour que le cercle considéré soit un arithmocercle est alors la suivante : *aucun de ces facteurs n'est de la forme* 4k — 1.

Supposons donc que les seuls facteurs considérés sont le nombre 2 et des nombres entiers de la forme $4k + 1$. Le cercle est alors un arithmocercle; par tâtonnements et à l'aide d'une table de décomposition des nombres $4k + 1$ en sommes de deux carrés, on déterminera un arithmopoint particulier de cet arithmocercle. *La connaissance d'un arithmopoint particulier entraîne alors celle d'une infinité d'autres arithmopoints*. Soit, en effet, $M_0(x_0, y_0)$ un arithmopoint de l'arithmocercle. Une arithmodroite quelconque issue de cet arithmopoint rencontre à nouveau l'arithmocirconférence en un point M_1 dont les coordonnées sont nécessairement des nombres rationnels. Réciproquement tout arithmopoint de l'arithmocercle, autre que M_0, est susceptible d'être obtenu par ce procédé, car la droite $M_0 M_1$ est une arithmodroite. Pratiquement, les coordonnées de l'arithmopoint connu a priori étant x_0, y_0, les coordonnées courantes d'un arithmopoint de l'arithmocercle sont :

$$x = x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta \ ,$$
$$y = x_0 \sin\theta - y_0 \cos\theta \ ;$$

θ est un azimut dont la tangente trigonométrique de la moitié est un nombre rationnel arbitraire.

C'est ainsi que le cercle représenté par l'équation $x^2 + y^2 = 2$ est nécessairement un arithmocercle, puisqu'il passe par l'arithmopoint $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. La représentation rationnelle de cet arithmocercle est

$$x = \frac{1 + 2\lambda - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \ , \qquad y = \frac{-1 + 2\lambda + \lambda^2}{1 + \lambda^2} \ .$$

6. — Arithmotriangles automédians. De même qu'à l'arithmocercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ se rattachent les arithmotriangles pythagoriques, il est possible d'associer diverses classes de triangles particuliers à d'autres arithmocercles. C'est ainsi, en premier lieu, qu'à l'arithmocercle $x^2 + y^2 = 2$ se rattachent les arithmotriangles automédians. Ce sont, par définition, les triangles à côtés rationnels liés par la relation $a^2 + c^2 = 2b^2$.

Les côtés a, b, c d'un triangle se présentant dans l'ordre $a > b > c$, les médianes sont nécessairement dans l'ordre $m_a < m_b < m_c$. Pour que ces médianes aient des longueurs proportionnelles à celles des côtés, il faut et il suffit que celles-ci soient liées par la relation

$$2b^2 = a^2 + c^2 \ ;$$

on a alors :

$$2m_a = \lambda c \ , \qquad 2m_b = \lambda b \ , \qquad 2m_c = \lambda a \ ,$$

avec $\lambda = \sqrt{3}$. En d'autres termes, m_a, m_b, m_c ont alors les longueurs qu'elles auraient respectivement dans trois triangles équilatéraux de côtés c, b et a. La condition d'égale inclinaison de deux médianes sur les côtés correspondants conduit aussi aux mêmes triangles.

Ces triangles tels que $2b^2 = a^2 + c^2$ ont été signalés par

E. LEMOINE (A. F. A. S., Toulouse, 1887) et par M. J. NEUBERG (*Mathésis,* 1889, question n° 661, pp. 261-264) et étudiés par M. J. DÉPREZ (*Mathésis*, 1903, pp. 196-200, 226-230, 245-248); ils ont été nommés *triangles automédians.* Pour avoir la représentation générale des côtés d'un arithmotriangle automédian, il suffit de poser

$$\begin{cases} a = b(\cos\theta + \sin\theta) \ , \\ c = b(\cos\theta - \sin\theta) \ , \end{cases}$$

conformément à la théorie de l'arithmocercle $x^2 + y^2 = 2$, passant par l'arithmopoint (1, 1), et d'introduire le paramètre $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$. On obtient ainsi

$$\begin{cases} a = \lambda(1 + 2t - t^2) \ , \\ b = \lambda(1 + t^2) \ , \\ c = \lambda(1 - 2t - t^2) \ ; \end{cases}$$

λ est un paramètre rationnel de similitude; c'est du paramètre t seul que dépend la forme du triangle. Reste à préciser les limites dans lesquelles doit être compris ce dernier paramètre t pour que les trois expressions ci-dessus représentent réellement les côtés d'un triangle. Une discussion simple prouve que l'on doit prendre

$$\lambda > 0 \ , \qquad \sqrt{3} - 2 < t < 2 - \sqrt{3} \ ;$$

si t est négatif, l'ordre des côtés est $a < b < c$; si t est positif, l'ordre est inverse. Il est encore possible de présenter la double condition précédente sous la forme suivante, équivalente mais plus expressive :

$$-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \ .$$

A côté des arithmotriangles automédians, il convient de placer les arithmotriangles satisfaisant à la relation

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{2}{b^2} \ ,$$

également signalée par M. J. NEUBERG. Ces arithmotriangles sont encore liés à l'étude de l'arithmocercle $x^2 + y^2 = 2$; on posera :

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{\lambda}{1 + 2t - t^2}, \\ b &= \frac{\lambda}{1 + t^2}, \\ c &= \frac{\lambda}{1 - 2t - t^2}; \end{aligned}\right.$$

ou encore

$$a = \frac{b}{\cos\theta + \sin\theta}, \qquad c = \frac{b}{\cos\theta - \sin\theta};$$

la double condition d'existence du triangle est ici :

$$0 < \sin\theta < \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

7. — Triangles a médianes orthogonales. L'étude des triangles à côtés rationnels dont deux médianes sont orthogonales est intimement liée à la théorie de l'arithmocercle

$$x^2 + y^2 = 5.$$

La relation moyennant laquelle, dans un triangle ABC de côtés a, b, c, les médianes issues des sommets A et B sont orthogonales est, en effet,

$$a^2 + b^2 = 5c^2,$$

c étant nécessairement le plus petit des trois côtés. Remarquons que l'arithmocercle $x^2 + y^2 = 5$ passant par l'arithmopoint (1, 2) a pour représentation paramétrique

$$x = \cos\theta + 2\sin\theta.$$
$$y = 2\cos\theta - \sin\theta.$$

Il en résulte pour l'arithmotriangle considéré les relations

$$\left\{\begin{aligned} a &= c(\cos\theta + 2\sin\theta); \\ b &= c(2\cos\theta - \sin\theta); \end{aligned}\right.$$

la représentation la plus générale de ce triangle est donc :

$$\left\{\begin{aligned} a &= \lambda(1 + 4t - t^2)\ , \\ b &= 2\lambda(1 - t - t^2)\ , \\ c &= \lambda(1 + t^2)\ , \end{aligned}\right.$$

λ et t étant deux paramètres rationnels quelconques ; le premier est un paramètre de similitude ; c'est du second, t, que dépend la forme du triangle. Une discussion simple prouve que t doit être compris entre les limites 0 et $\frac{1}{3}$.

Pour $t < \sqrt{10} - 3$, l'ordre des côtés est $b > a > c$; pour

$$\sqrt{10} - 3 < t < \frac{1}{3}\ ,$$

l'ordre des côtés est au contraire $a > b > c$.

8. — Arithmosphère. Il s'agit d'étudier la décomposition d'un nombre rationnel en une somme de trois carrés de nombres rationnels. Un premier cas particulier de cette étude des équations du type $x^2 + y^2 + z^2 = \rho$ est celui où ρ est un carré : c'est le problème des parallélépipèdes rectangles à arêtes et diagonales commensurables. L'équation considérée est alors celle $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ d'une arithmosphère à rayon rationnel. Pour avoir un arithmopoint d'une telle arithmosphère à rayon rationnel, il suffit de considérer un point de la sphère dont les tangentes trigonométriques des demi-longitude et demi-latitude soient rationnelles ; les formules de représentation correspondantes sont :

$$x = R\cos\varphi\cos\psi\ , \qquad y = R\cos\varphi\sin\psi\ , \qquad z = R\sin\varphi\ ,$$

$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$ et $\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}$ étant deux nombres rationnels arbitraires ; posant $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = u$, $\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} = v$, il vient, en effet :

$$x = R.\frac{(1 - u^2)(1 - v^2)}{(1 + u^2)(1 + v^2)}\ , \qquad y = 2R\frac{v(1 - u^2)}{(1 + u^2)(1 + v^2)} \qquad z = 2R\frac{u}{1 + u^2}\ .$$

Mais cette représentation paramétrique de la sphère est impropre, en ce sens que si elle fait correspondre à tout couple de valeurs rationnelles de (u, v) un arithmopoint de la sphère, celui-ci n'est pas toutefois l'arithmopoint le plus général de cette arithmosphère. Des formules

$$u = \frac{R \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \qquad v = \frac{uy}{z + u(x - R)},$$

il résulte que la représentation géographique laisse de côté les arithmopoints de la sphère tels que leur distance à la ligne des pôles Oz n'est pas rationnelle. C'est ainsi que l'arithmopoint (1, 2, 2) de l'arithmosphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ est représentée par les valeurs irrationnelles de u et de v.

Pour avoir une représentation propre, il suffit d'avoir recours à la représentation stéréographique de la sphère sur un plan. L'introduction de la transformation stéréographique dans l'étude de cette même question conduit à des formules plus simples et présente, en outre de l'avantage essentiel de permettre de représenter l'arithmopoint le plus général de l'arithmosphère, celui de transformer les courbes algébriques tracées sur elle en des courbes planes particulièrement simples le plus souvent. Prenant, en effet, le point 0, 0, R) pour point de vue et le plan $z = 0$ pour plan de projection, les formules

$$x = R\frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \qquad y = R\frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \qquad z = R\frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\xi^2 + \eta^2 + 1},$$

$$\xi = \frac{x}{R - z}, \qquad \eta = \frac{y}{R - z},$$

expriment les relations entre le point $M(x, y, z)$ de la sphère et son image $\mu(\xi, \eta)$.

Il convient de rappeler ici que E. Catalan (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, [3], t. 27, 1894), observe que l'identité

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2$$

prouve que : *sur la sphère dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

il existe une infinité de points dont les coordonnées sont *rationnelles*. Il est manifeste que l'identité précédente n'est autre précisément que celle,

$$(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 \equiv (\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 + (2\xi)^2 + (2\eta)^2 \ ,$$

qui résulte des formules précédentes de la représentation stéréographique.

Le cas d'une arithmosphère générale $x^2 + y^2 + z^2 = \rho$ se traite de la même manière que le cas d'un arithmocercle quelconque; on absorbe dans x^2, y^2, z^2 les facteurs carrés de l'un ou l'autre terme de ρ et on ramène l'étude de la question au cas où ρ est entier. Par tâtonnements, on détermine, *si elle existe*, une solution particulière dans ce dernier cas et on en déduit une double infinité d'arithmopoints par l'intersection de la sphère et d'une arithmodroite arbitraire issue de l'arithmopoint connu a priori.

9. — Arithmohypersphère : Toute hypersphère est une arithmohypersphère. L'extension des considérations précédentes au cas d'une hypersphère appartenant à un espace à plus de trois dimensions s'effectue simplement. Il est utile de l'indiquer, en vue de l'application de la considération des arithmohypersphères à une classe spéciale de quadrilatères inscriptibles intéressants (§ 14).

Soit, dans un espace à n dimensions, une hypersphère représentée par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = \mathrm{R}^2$$

R étant un nombre rationnel donné. Les équations

$$\left\{\begin{array}{ll}
x_1 & = \mathrm{R} \sin \theta_1 \ , \\
x_2 & = \mathrm{R} \cos \theta_1 \,.\, \sin \theta_2 \ , \\
x_3 & = \mathrm{R} \cos \theta_1 \,.\, \cos \theta_2 \,.\, \sin \theta_3 \ , \\
x^4 & = \mathrm{R} \cos \theta_1 \,.\, \cos \theta_2 \,.\, \cos \theta_3 \,.\, \sin \theta_4 \ , \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} & = \mathrm{R} \cos \theta_1 \,.\, \cos \theta_2 \,.\, \cos \theta_3 \,.\, \cos \theta_4 \ \ldots\ \cos \theta_{n-2} \,.\, \sin \theta_{n-1} \ , \\
x_n & = \mathrm{R} \cos \theta_1 \,.\, \cos \theta_2 \,.\, \cos \theta_3 \,.\, \cos \theta_4 \ \ldots\ \cos \theta_{n-2} \,.\, \cos \theta_{n-1} \ ,
\end{array}\right.$$

dans lesquelles on introduit des valeurs rationnelles de

$\tang \frac{\theta_1}{2}$, $\tang \frac{\theta_2}{2}$, ... $\tang \frac{\theta_{n-1}}{2}$, représentent un point rationnel de l'hypersphère.

Considérons maintenant le cas d'une hypersphère dont l'équation est encore rationnelle, qui peut donc être réduite à la forme

$$\mathop{\mathrm{S}}_{k=1}^{k=n} x_k^2 = \rho \ ,$$

par une simple translation rationnelle d'axes, mais dont le rayon $\sqrt{\rho}$ est un nombre irrationnel. Il est essentiel d'observer qu'alors que le cercle de l'espace à deux dimensions et la sphère de l'espace ordinaire ne sont pas généralement douées d'arithmopoints, même lorsque la rationalité des coefficients de leurs équations respectives est assurée, il en est différemment pour les hypersphères, dès l'espace à quatre dimensions. Il résulte, en effet, du théorème de Bachet (généralisé conformément aux considérations du § 14) qu'*une hypersphère représentée par une équation rationnelle admet toujours un arithmopoint.* Par suite, elle admet une ∞^{n-1} d'arithmopoints; elle est alors une *arithmohypersphère.* Soient $(\overset{0}{x}_1\, \overset{0}{x}_2\, \overset{0}{x}_3 \ldots \overset{0}{x}_n)$ les coordonnées rationnelles du point rationnel M_0 connu *a priori.* Pour obtenir un autre point rationnel, il suffit d'associer à l'équation de l'hypersphère les $n - 1$ équations

$$\frac{x_1 - \overset{0}{x}_1}{a_1} = \frac{x_2 - \overset{0}{x}_2}{a_2} = \frac{x_3 - \overset{0}{x}_3}{a_3} = \ldots = \frac{x_n - \overset{0}{x}_n}{a_n} \ ,$$

d'une hyperdroite passant par le point M_0; les $a_1 \ldots a_n$ sont n nombres rationnels arbitraires. Ceci revient à poser

$$x_1 = a_1\lambda + \overset{0}{x}_1 \ , \qquad x_2 = a_2\lambda + \overset{0}{x}_2 \ , \ \ldots \ , \ x_n = a_n\lambda + \overset{0}{x}_n \ ;$$

λ est un nombre rationnel défini par la formule

$$\lambda = -\,2\,\frac{a_1\overset{0}{x}_1 + a_2\overset{0}{x}_2 + \ldots + a_n\overset{0}{x}_n}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \ .$$

Il est encore possible de présenter la solution de cette même question sous une autre forme, en introduisant les n fonctions $\Theta_1 \ldots \Theta_n$ suivantes et leurs dérivées partielles:

$$\left\{\begin{aligned}
\Theta_1 &= \sin\theta_1 \;, \\
\Theta_2 &= \cos\theta_1 . \sin\theta_2 \;, \\
\Theta_3 &= \cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \sin\theta_3 \;, \\
\Theta_4 &= \cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \cos\theta_3 . \sin\theta_4 \;, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Theta_{n-1} &= \cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \cos\theta_3 . \cos\theta_4 \ldots \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1} \;, \\
\Theta_n &= \cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \cos\theta_3 . \cos\theta_4 \ldots \cos\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} \;;
\end{aligned}\right.$$

les $\theta_1 \ldots \theta_{n-1}$ sont $n - 1$ paramètres arbitraires. On posera alors :

$$\left\{\begin{aligned}
x_1 &= \overset{0}{x}_n \Theta_1 + \overset{0}{x}_1 \frac{\partial\Theta_1}{\partial\theta_1} + \overset{0}{x}_2 \frac{\partial\Theta_1}{\partial\theta_2} + \overset{0}{x}_3 \frac{\partial\Theta_1}{\partial\theta_3} + \ldots + \overset{0}{x}_{n-1} \frac{\partial\Theta_1}{\partial\theta_{n-1}} \;, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_k &= \overset{0}{x}_n \Theta_k + \overset{0}{x}_1 \frac{\partial\Theta_k}{\partial\theta_1} + \overset{0}{x}_2 \frac{\partial\Theta_k}{\partial\theta_2} + \overset{0}{x}_3 \frac{\partial\Theta_k}{\partial\theta_3} + \ldots + \overset{0}{x}_{n-1} \frac{\partial\Theta_k}{\partial\theta_{n-1}} \;, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \overset{0}{x}_n \Theta_n + \overset{0}{x}_1 \frac{\partial\Theta_n}{\partial\theta_1} + \overset{0}{x}_2 \frac{\partial\Theta_n}{\partial\theta_2} + \overset{0}{x}_2 \frac{\partial\Theta_n}{\partial\theta_3} + \ldots + \overset{0}{x}_{n-1} \frac{\partial\Theta_n}{\partial\theta_{n-1}} \;,
\end{aligned}\right.$$

et on introduira naturellement dans ces dernières formules des paramètres rationnels arbitraires $t_1 t_2 \ldots t_{n-1}$ respectivement égaux aux tangentes des arcs moitiés

$$t_1 = \operatorname{tang}\frac{\theta_1}{2} \;, \qquad t_2 = \operatorname{tang}\frac{\theta_2}{2} \;, \ldots, \qquad t_{n-1} = \operatorname{tang}\frac{\theta_{n-1}}{2} \;.$$

Ainsi donc, on peut représenter les coordonnées courantes d'un point rationnel d'une arithmohypersphère par des formules contenant les n indéterminées $(a_1 \ldots a_n)$ sous forme homogène, ou les $n - 1$ indéterminées $t_1 \ldots t_{n-1}$.

Mais tandis que, dans le premier mode de représentation, on obtient l'arithmopoint le plus général de l'arithmosphère, il n'en est nullement de même dans le second cas ; la représentation au moyen des fonctions Θ est impropre, tout de même que la représentation géographique de la sphère ordinaire. Par une légère transformation de la première représentation, il est possible, d'autre part, d'étendre aux hypersphères les propriétés de la représentation stéréographique qui est, elle aussi, une representation propre.

Les arithmotriangles héroniens.

10. — Le problème des arithmotriangles héroniens consiste à déterminer les triangles tels que, les côtés étant rationnels, la surface soit aussi un nombre rationnel. Il résulte de cette définition que, dans tout arithmotriangle héronien, les mesures des divers éléments linéaires (longueurs des côtés, longueurs des hauteurs, rayons des cercles inscrits et ex-inscrits, rayon du cercle circonscrit, segments déterminés sur les côtés par les hauteurs) et enfin la surface et les nombres trigonométriques des angles du triangle sont des nombres rationnels.

La détermination des arithmotriangles héroniens généraux peut être effectuée de diverses manières. Il est d'abord possible de faire dériver leur construction de celle des arithmotriangles rectangles pythagoriques. Etant donnés, en effet, deux arithmotriangles rectangles pythagoriques, on peut, par similitudes convenables, rendre égales deux cathètes appartenant respectivement aux deux triangles rectangles; en juxtaposant ensuite les deux cathètes égales, de manière que les deux autres cathètes soient alignées, on constitue un arithmotriangle héronien acutangle et un arithmotriangle héronien obtusangle, suivant que les deux triangles juxtaposés sont de part et d'autre ou non de la cathète commune.

Une seconde méthode de construction générale des arithmotriangles héroniens résulte de la rationalité du rayon du cercle circonscrit et des nombres trigonométriques de ses angles. Il suffit donc de se donner un premier nombre rationnel R qui sera le rayon du cercle circonscrit, et deux autres nombres y et z, rationnels tous deux et assujettis aux inégalités suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} > z > 0 , \qquad \sqrt{1+z^2} - z > y > z ;$$