§ 3. — Lieu des plans rencontrant sept couples de droites en sept couples de points conjugués par rapport à une même conique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 1$, $\mu_5 = 1$, $\mu_6 = 0$, $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 0$, $\nu_3 = 2$, $\nu_4 = 0$, $\nu_5 = 1$, $\nu_6 = 1$. On trouve

$$\xi = 11 \ , \qquad \zeta = 17 \ , \qquad \chi = 6 \ .$$

Les plans sur lesquels les quadriques d'un système linéaire ∞^6 découpent ∞^4 coniques, enveloppent une développable de classe six.

Remarquons que par une conique découpée sur un plan tangent à la développable considérée par une quadrique du système donné passent ∞^2 quadriques de ce système. Parmi celles-ci, il y en a ∞^1 contenant le plan, donc :

Le lieu des plans faisant partie de ∞^1 quadriques d'un système linéaire ∞^6, est une développable de classe six.

8. — Le déterminant obtenu en supprimant une ligne dans la matrice (2) et égalé à zéro exprime que six quadriques découpent. sur le plan X, Y, Z, six coniques d'un système (linéaire) ∞^4. D'après ce que nous avons vu (§ 1, n° 6).

Les plans sur lesquels les quadriques d'un système linéaire ∞^5 découpent ∞^4 coniques, enveloppent une surface de classe quatre.

Par une de ces ∞^4 coniques passent ∞^1 quadriques du système, donc le plan appartient à une de ces quadriques.

Les plans appartenant à des quadriques d'un système linéaire ∞^5 enveloppent une surface de quatrième classe.

Les surfaces représentées par deux déterminants d'ordre six tirés de la matrice (2) ont en commun une développable de classe seize se décomposant en la développable considérée plus haut et en une autre, représentée par la matrice (2), où l'on a supprimé deux lignes. C'est le lieu des plans sur lesquels les quadriques d'un système ∞^4 découpent ∞^3 coniques. Ou encore, c'est le lieu des plans appartenant à des quadriques d'un système linéaire ∞^4. Cette développable est de classe 10.

§ 3. — *Lieu des plans rencontrant sept couples de droites en sept couples de points conjugués par rapport à une même conique.*

9. — Soient d_1, d'_1 ; d_2, d'_2 ; ... ; d_7, d'_7 sept couples de droites ne se rencontrant pas deux à deux. Ecrivons les équations des droites d_i, d'_i formant le i — ième couple sous la forme symbolique

$$ai_x \equiv ai_0 x_0 + ai_1 x_1 + ai_2 x_2 + ai_3 x_3 = 0 \ ,$$

$$bi_x \equiv bi_0 x_0 + bi_1 x_1 + bi_2 x_2 + bi_3 x_3 = 0 \ ,$$

pour d_i,

$$a'i_x = 0 \ , \qquad b'i_x = 0$$

pour d'_i.

Un point du plan déterminé par les trois points (non situés en ligne droite) X, Y, Z a pour coordonnées

$$\alpha x_k + \beta y_k + \gamma z_k \,. \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

Si ce point est situé sur la droite d_i, on a

$$\alpha a i_x + \beta a i_y + \gamma a i_z = 0 \,,$$
$$\alpha b i_x + \beta b i_y + \gamma b i_z = 0 \,.$$

Désignons par $\alpha_i\ \beta_i,\ \gamma_i$ les paramètres déterminant ce point; on a

$$\alpha_i : \beta_i : \gamma_i = \begin{vmatrix} ai_y & ai_z \\ bi_y & bi_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} ai_z & ai_x \\ bi_z & bi_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} ai_x & ai_y \\ bi_x & bi_y \end{vmatrix} \,.$$

De même, les paramètres α_i', β_i', γ_i' fixant la position du point du plan XYZ se trouvant sur d_i', sont

$$\alpha_i' : \beta_i' : \gamma_i' = \begin{vmatrix} a'i_y & a'i_z \\ b'i_y & b'i_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a'i_z & a'i_x \\ b'i_z & b'i_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a'i_x & a'i_y \\ b'i_x & b'i_y \end{vmatrix} \,.$$

Si les points de rencontre du plan XYZ sont conjugués par rapport à une conique de ce plan, il existe une relation bilinéaire entre les quantités α_i, β_i, γ_i; α_i', β_i', γ_i'. Soit

$$\varepsilon_{11}\alpha_i\alpha_i' + \varepsilon_{22}\beta_i\beta_i' + \varepsilon_{33}\gamma_i\gamma_i' + 2\varepsilon_{12}(\alpha_i\beta_i' + \alpha_i'\beta_i)$$
$$+ 2\varepsilon_{23}(\beta_i\gamma_i' + \beta_i'\gamma_i) + 2\varepsilon_{31}(\gamma_i\alpha_i' + \gamma_i'\alpha_i) = 0$$

cette relation.

Six couples de points conjugués par rapport à une même conique déterminent cette conique. Par suite, si les sept couples de points d'intersection du plan XYZ avec les sept couples de droites donnés sont conjugués par rapport à une même conique, on doit avoir

$$(3) \qquad \begin{Vmatrix} \alpha_1\alpha_1' & \beta_1\beta_1' & \gamma_1\gamma_1' & \alpha_1\beta_1' + \alpha_1'\beta_1 & \beta_1\gamma_1' + \beta_1'\gamma_1 & \gamma_1\alpha_1' + \gamma_1'\alpha_1 \\ \alpha_2\alpha_2' & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ \alpha_7\alpha_7' & - & - & - & - & \gamma_7\alpha_7' + \gamma_7'\alpha_7 \end{Vmatrix} = 0 \,.$$

Les plans rencontrant sept couples de droites en sept couples de points conjugués par rapport à une même conique engendrent donc une développable. Les formules trouvées au § 1 permettent de calculer la classe de cette développable. On doit poser $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 1$, $\lambda_5 = 2$, $\lambda_6 = 1$; $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 2$, $\mu_4 = 1$, $\mu_5 = 1$, $\mu_6 = 2$; $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 0$, $\nu_4 = 2$, $\nu_5 = 1$, $\nu_6 = 1$.

On trouve

$$\xi = 39 \ , \qquad \zeta = 73 \ , \qquad \chi = 34 \ .$$

Les plans rencontrant sept couples de droites en des couples de points conjugués par rapport à une même conique, enveloppent une développable de classe 34.

10. — Considérons un déterminant d'ordre six extrait de la matrice (3). Ce déterminant, égalé à zéro, représente le lieu des ∞^2 plans rencontrant six couples de droites en six couples de points conjugués par rapport à une conique. C'est un déterminant du type de ceux que j'ai rencontré dans un travail rédigé lorsque j'étais encore sur les bancs de l'Athénée[1]; dans ce travail, j'avais, pour atteindre la plus grande généralité possible, considéré le lieu des S_{n-1} rencontrant $n^k - 1$ groupes de k S_{r-n}, dans S_r, en des groupes de k points liés par une relation k — linéaire, et il en était résulté quelques obscurités.

Reprenons notre déterminant d'ordre six, tiré de la matrice (3) et égalé à zéro, et supposons que ce soit précisément celui que l'on obtient en effaçant la septième ligne de cette matrice. Ainsi que nous l'avons observé (§ 1. n° 6), ce déterminant représente une surface-enveloppe de classe huit.

Donnons à X, Y des positions fixes sur la droite d_1 et laissons d'ailleurs Z arbitraire (en dehors de cette droite). On a alors $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ et par suite, le déterminant est identiquement nul et la surface-enveloppe contient la droite d_1. De même, on vérifie qu'elle contient les droites d_1', d_2, d_2', ..., d_6, d_6'.

11. — Considérons la matrice obtenue en supprimant les deux dernières lignes de la matrice (3). Cette nouvelle matrice, égalé à zéro, représente le lieu des ∞^1 plans rencontrant les cinq couples de droites d_1, d_1': d_2, d_2'; ...; d_5, d_5' en cinq couples de points conjugués par rapport à ∞^1 coniques (d'un faisceau). En reprenant le calcul que nous avons fait au § 1, on trouve que cette développable est de classe 20.

L'intersection des surfaces-enveloppes représentées respectivement par l'évanouissement des déterminants tirés de la matrice (3)

[1] *Sur une extension à l'espace d'un théorème de Grassmann.* Nouv. Annales de Math. 1907. — Je profite de cette citation pour rectifier une erreur qui s'est glissée dans un autre travail : *Sur la polarité dans les complexes du second degré (ordre et classe).* (Ens. Math. 1907.) La courbe d'ordre cinq dont il est question au n° 2, page 388, se scinde en cinq droites dont l'une ne rencontre pas d et peut être considérée comme sa correspondante. Cette correspondance serait sans doute intéressante à étudier.

en effaçant soit la dernière, soit l'avant-dernière ligne, est une développable de classe 64. Cette développable se décompose en :

1° la développable de classe 34 lieu des plans rencontrant les sept couples de droites donnés en des couples de points conjugués par rapport à une même conique;

2° la développable de classe 20 lieu des plans rencontrant les cinq couples de droites d_1, d_1'; ... ; d_5, d_5' en des couples de points conjugués par rapport à ∞^1 coniques;

3° les faisceaux de plans d'axes d_1, d_1', ..., d_5, d_5'.

Les plans rencontrant six couples de droites en six couples de points conjugués par rapport à une conique, enveloppent une surface de classe huit contenant simplement les douze droites données.

Les plans rencontrant cinq couples de droites en des couples de points conjugués par rapport aux coniques d'un faisceau, enveloppent une développable de classe vingt.

7 juillet 1914.

LE PROBLÈME D'INTERPOLATION ET LA FORMULE DE TAYLOR

PAR

R. Suppantschitsch (Vienne).

---

1. — Porté par le désir de ne pas partir dans l'enseignement du théorème de Taylor, d'une formule toute faite qu'on vérifie en calculant l'erreur commise, j'ai abordé dans cette *Revue*[1] en 1901, le problème de tirer immédiatement la formule de Taylor de celle de la moyenne. La méthode que j'ai imaginée dans ce but n'a pas été exacte.

On ne saurait pas, évidemment, surpasser la simplicité de la démonstration usuelle du théorème de Taylor, et cependant le désir subsiste de suggérer préalablement aux élèves la forme des coefficients de cette formule comme le témoignent les essais répétés et quelquefois malaisés d'y arriver au moins pour les trois premiers coefficients. On obtient facilement les deux premiers, mais le troisième exige déjà des raisonnements assez compliqués. Si nous nous bornons à des méthodes qu'on pourrait encore appli-

---

[1] Sur la démonstration du théorème de Taylor, l'*Enseignement mathématique*, t. 3 (1901), p. 355-357.