

Note I. — Egalités doubles.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

D'ailleurs, pour qu'une égalité entre les n premiers entiers puisse avoir lieu, il faut que n soit non seulement pair, mais encore multiple de 4, car la somme des $2m$ premiers entiers est impaire en même temps que m .

THÉORÈME III. — Supposons, dans le lemme IV, que $a, \dots \alpha, \dots$ désignent les $4n$, les $8n$, les $16n$, ... premiers entiers; en faisant successivement $h = 4n, 8n, 16n, \dots$ on verra, à cause du lemme V, que les $4(2k+1)$, les $8(2k+1)$, ... premiers entiers donnent des égalités respectivement doubles, triples, quadruples, ... Par conséquent, les $2^m(2k+1)$ premiers entiers peuvent se grouper en deux suites formant une égalité m^{uple} .

Note I. — Égalités doubles.

THÉORÈME I. — Une égalité double doit avoir plus de deux termes dans chaque membre.

THÉORÈME II. — On ne saurait avoir $x + x + x \stackrel{2}{=} y + z + w$.

THÉORÈME III. — Les trois termes ne sauraient être à la fois en progression arithmétique ou géométrique dans les deux membres.

Problème I. Résoudre $x \stackrel{2}{=} y' + z' + w'$. Changeons y', z' et w' en $x - y, y - z$ et z ; la question revient à la résolution de $x \stackrel{2}{=} (x - y) + (y - z) + z$ ou simplement de $x^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2$, d'où on tire

$$x = y - z + \frac{z^2}{y}.$$

Posons en conséquence $z = tv, y = ut$, u et v étant premiers entre eux; il viendra

$$x = ut - vt + \frac{v^2 t}{u} \quad \text{d'où} \quad t = su$$

et par suite

$$x = (u^2 - v + v^2)s, \quad y = u^2 s, \quad z = uvs;$$

d'où, en négligeant le facteur commun s , la formule

$$(u^2 - uv + v^2) \stackrel{2}{=} v(v - u) - u(v - u) + uv,$$

qui donne une infinité de solutions, u et v restant arbitraires.

Cor. L'égalité proposée peut s'écrire $0 + 0 + x \stackrel{2}{=} y' + z' + w'$, ou, en ajoutant $-x$ à chaque terme, $-x - x \stackrel{2}{=} (y - x) + (z - x) + (w - x)$, ce qui fournit cette autre relation

$$(uv - u^2 - v^2) + (uv - u^2 - v^2) \stackrel{2}{=} u^2 + v^2 + (u - v)^2.$$

Problème II. Résoudre $-x + x \stackrel{2}{=} y' + z' - w'$. Écrivons ainsi cette égalité

$$-x + x \stackrel{2}{=} (x - y - z) + (-x - y + z) + (2y)$$

ou $x^2 + x^2 = (x - y - z)^2 + (-x - y + z)^2 + (2y)^2$,

d'où, en simplifiant et continuant comme au précédent problème,

$$t = sv, \quad y = su, \quad z = sv^2, \quad 2x = 3su^2 + sv^2,$$

et, en négligeant le coefficient s ,

$$-(3u^2 + v^2) + (3u^2 + v^2) \stackrel{2}{=} (3u^2 - v^2 - 2uv) + (-3u^2 + v^2 - 2uv) + 4uv.$$

Cor. I. L'égalité proposée peut encore s'écrire $-x + x \stackrel{2}{=} -y' - z' - w'$: elle a donc toujours au moins deux solutions.

Ainsi $-7 + 7 \stackrel{2}{=} -3 - 5 + 8$ peut encore s'écrire $-7 + 7 \stackrel{2}{=} 3 + 5 - 8$, ou bien, en ajoutant 7 partout,

$$7 + 14 \stackrel{2}{=} 2 + 4 + 15 \stackrel{2}{=} -1 + 10 + 12.$$

II. Ajoutant x à tous les termes de l'égalité ainsi complétée $0 - x + x \stackrel{2}{=} y' + z' + w'$, on trouve $x + 2x \stackrel{2}{=} y'' + z'' + w''$: on a donc en même temps la solution de cette nouvelle égalité.

THÉORÈME IV. — Posons

$$a^2 + b^2 = (a - fh)^2 + (b + gh)^2 + (fh - gh)^2,$$

il viendra

$$(\alpha) \quad fa - gb = (f^2 + g^2 - fg)h.$$

Donc si a et b sont liés par la relation (α) on aura

$$a + b \stackrel{2}{=} (a - fh) + (b + gh) + (fh - gh).$$

Ainsi, les suppositions $f=2, g=1; f=1, g=-1; f=3, g=1; f=3, g=2; \dots$ donnent ces théorèmes:

$$\text{si } 2a - b = 3h, \quad \text{on aura: } a + b \stackrel{2}{=} (a - 2h) + (b + h) + h.$$

$$\text{si } a + b = 3h, \quad \text{on aura: } a + b \stackrel{2}{=} (a - h) + (b - h) + 2h.$$

$$\text{si } 3a - b = 7h, \quad \text{on aura: } a + b \stackrel{2}{=} (a - 3h) + (b + h) + 2h.$$

$$\text{si } 3a - 2b = 7h, \quad \text{on aura: } a + b \stackrel{2}{=} (a - 3h) + (b + 2h) + h.$$

$$\dots \dots \dots$$

Problème III. Formule générale de l'égalité double. Posons

$$x + y \stackrel{2}{=} (y + t) + z + w ;$$

on aura

$$x^2 = t^2 + z^2 + w^2 + 2tz + 2tw + 2zw = 2yt + t^2 + z^2 + w^2$$

d'où

$$tz + tw + zw = yt$$

ce qui demande qu'on puisse poser $zw = tu$. Ecrivons en conséquence

$$z = ab, \quad w = cd, \quad t = bd, \quad u = ac,$$

il viendra

$$(\beta) \quad (ab + bd + cd) + (ab + ac + cd) \stackrel{2}{=} (ab + ac + bd + cd) + ab + cd.$$

Cor. I. On peut tirer de là une infinité d'égalités doubles. Par exemple posons $c = b$ et ajoutons aux six termes — compris le terme zéro — le nombre $hb - ab - bd$; il viendra la formule

$$(h - a - d) + (h + a) + (h + d) \stackrel{2}{=} (h + a + d) + (h - a) + (h - d)$$

qui se simplifie, tout en restant symétrique en y faisant $d = 2a$.

II. *Résolution de* $A + B \stackrel{2}{=} x + y + z$. Assimilant à (β) , on voit qu'on a à résoudre

$$A^2 + B^2 = (A + ac)^2 + (B - ac - cd)^2 + (cd)^2$$

d'où

$$(\gamma) \quad c = \frac{Ba - Aa + Bd}{a^2 + d^2 + ad}.$$

Ainsi soit $A = 17$, $B = 3$; on voit, après quelques tâtonnements, que c est entier pour $a = 2$, $d = 3$. On trouve en conséquence

$$c = -1, \quad b = \frac{A - cd}{a + d} = 4$$

et par suite l'égalité double cherchée $3 + 17 \stackrel{2}{=} -3 + 8 + 15$.

Le problème a autant de solutions qu'il y a de valeurs de a et de d qui rendent entière la valeur du second membre de (γ) .

On remarquera que (γ) fournit les théorèmes IV.

III. *Pour que l'équation* $A + B \stackrel{2}{=} x + y + z$ *soit résoluble, il faut et il suffit que le nombre* $A^2 + B^2 - AB$, *s'il n'est pas divisible par 3, ait au moins deux facteurs premiers de la forme* $6h + 1$ ¹.

¹ Ce théorème et le suivant m'ont été communiqués sans démonstration par M. G. Tarry.

Si cette équation est résoluble, on doit pouvoir écrire :

$$A = ab + bd + cd, \quad B = ab + ac + cd.$$

Or on a dans ce cas :

$$A^2 + B^2 - AB = (a^2 + d^2 + ad)(b^2 + c^2 + bc).$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante est que le nombre $A^2 + B^2 - AB$ puisse se décomposer en deux facteurs de forme $x^2 + y^2 + xy$, exprimons qui ne peut avoir pour facteurs que 3 ou des nombres premiers de forme $6h + 1$.

Si le nombre $A^2 + B^2 - AB = (A + B)^2 - 3AB$ est divisible par 3, il en est de même de $A + B$; or ce cas a été traité plus haut. (Théorème IV.)

IV. Supposons qu'on puisse écrire $A^2 + B^2 - AB = X^2 + Y^2 - XY$; en posant $x = 2X - Y$, $y = 2Y - X$, on aura :

$$(\delta) \quad A + B = \frac{A + B \pm x}{3} + \frac{A + B \pm y}{3} + \frac{A + B \mp x \mp y}{3}.$$

En effet, cette relation revient à

$$(\varepsilon) \quad 3(A^2 + B^2 - AB) = x^2 + y^2 + xy$$

ou bien à

$$A^2 + B^2 - AB = \left(\frac{2x + y}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y + x}{3}\right)^2 - \frac{2x + y}{3} \frac{2y + x}{3}.$$

(ε) donne $(x - y)^2 + 3xy \equiv 0 \pmod{3}$, d'où $x \equiv y$ et $2x + y \equiv 0$. D'ailleurs on a :

$$(A + B)^2 \equiv (X + Y)^2 \equiv (2X - Y)^2 \equiv x^2 \equiv y^2.$$

Ainsi si $A + B$ est un non-multiple de 3, il en est de même de x et de y , et on prendra, pour les signes de x et de y , ceux qui donnent pour (δ) des nombres entiers.

V. L'équation $x + y = z + A + B$ est toujours soluble, et elle a même, en général, quatre solutions. On n'a, pour s'en assurer, qu'à changer dans (β) a et b , 1° en $\pm a$ et $\pm b$, 2° en $\pm b$ et $\pm a$.

Note II. — Carrés panmagiques de module $4n$.

Soit $n = 3$. Considérons, par exemple, l'égalité entre les 12 premiers entiers

$$1 + 11 + 3 + 9 + 8 + 7 = 12 + 2 + 10 + 4 + 5 + 6$$