SUR L'ORTHOGONALISATION DE FONCTIONS

La somme

$$(e_2 - e_3)\sigma_1 u \sigma_1 v \sigma_1 w + (e_3 - e_1)\sigma_2 u \sigma_2 v \sigma_2 w + (e_1 - e_2)\sigma_3 u \sigma_3 v \sigma_3 w \ , \qquad (95)$$

qui est nulle pour u = v = w = 0, *le reste quand* u + v + w = 0; *en outre, à cause de la parité des* σ_i (u), *la même relation est satisfaite pour toutes les combinaisons des signes* $\pm$ *dans la formule*

$$u \pm v \pm w = 0 \ .$$

Ce résultat est conforme de tout point à l'équation bien connue dans la théorie des fonctions σ

$$\sum (e_j - e_k)\sigma_i(u)\sigma_i(v)\sigma_i(w) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Pi\sigma\left(\frac{u \pm v \pm w}{2}\right) ; \qquad (96)$$

il valait la peine de noter ici combien cette formule se rattache étroitement à l'équation d'Euler et aux polynômes doublement quadratiques.

C. Cailler (Genève).

SUR L'ORTHOGONALISATION DE FONCTIONS

---

1. — Considérons le système

$$\varphi_0 \cdot \varphi_1 , \varphi_2 , \dots$$

de fonctions arbitraires et linéairement indépendantes de la variable réelle x. Exprimons pareillement par ψ_r celle parmi les expressions de forme

$$a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_{r-1}\varphi_{r-1} + \varphi_r \ ,$$

où les a sont des constantes réelles, qui rend l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} (a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots a_{r-1}\varphi_{r-1} + \varphi_r)^2 \, dx$$

égale à un minimum. On a évidemment (nous écrirons partout $\int$ au lieu de $\int_{x_1}^{x_2}$

$$\int \varphi_0 \psi_r dx = \int \varphi_1 \psi_r dx = \dots = \int \varphi_{r-1} \psi_r dx = 0$$

et pourtant, pour $s < r$, puisque ψ_s est une expression linéaire de $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_s$

$$\int \psi_r \psi_s dx = 0, \qquad (s < r)$$

d'où l'on tire en général

$$\int \psi_r \psi_s dx = 0. \qquad (s \neq r)$$

Les fonctions ψ sont orthogonales dans l'intervalle $(x_1 x_2)$, arbitrairement choisi.

En particulier, si nous posons

$$x_2 = - x_1 = 1, \qquad \varphi_r = x^r$$

nous arrivons à la définition de fonctions qui ne diffèrent des fonctions sphériques que par un facteur constant. C'est un résultat connu[1].

2. — M. Goursat[2] arrive à la définition de fonctions orthogonales Φ_0, Φ_1, ... déduites des fonctions données $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ en posant d'abord

$$\varphi_0 = \Phi_0, \qquad \bar{\varphi}_i = \varphi_i + c_i \Phi_i \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

la constante c_i étant déterminée de façon que

$$\int \Phi_0 \bar{\varphi}_i dx = 0.$$

---

[1] Runge, *Theorie und Praxis der Reihen*, Leipzig, 1904, p. 14.

[2] *Annales de la Faculté de Toulouse*, Tome 10, 2e série, 1908. L'auteur cite, d'après Lalesco, *Introduction à la Théorie des Equations Intégrales*, Paris 1912.

Les fonctions $\overline{\varphi}_i$ sont orthogonales à Φ_0. Nous définissons d'une façon analogue des fonctions $\overline{\overline{\varphi}}_i$ $(i = 2, 3, \dots)$ orthogonales à Φ_0 et à Φ_1

$$\Phi_1 = \overline{\varphi}_1$$

en formant les expressions

$$\overline{\overline{\varphi}}_i = \overline{\varphi}_i + \gamma_i \Phi_1 \qquad (i = 2, 3, \dots)$$

et en déterminant la constante γ_i de façon, que

$$\int \Phi_1 \overline{\overline{\varphi}}_i \, dx = 0$$

La répétition du procédé indiqué nous donne toutes les fonctions Φ_r telles que

$$\int \Phi_r \Phi_s \, dx = 0 . \qquad (r \neq s)$$

3. — Nous nous proposons de démontrer que

$$\psi_r \equiv \Phi_r .$$

Il est avant tout évident, que Φ_r est une expression de la forme

$$a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \dots + a_{r-1} \varphi_{r-1} + \varphi_r .$$

En réalité, si nous exprimons en général par $D_\Phi f(x)$ la transformation linéaire

$$D_\Phi f(x) = f(x) - \frac{\int f(x) \Phi(x) \, dx}{\int \Phi(x) \Phi(x) \, dx} \Phi(x) ,$$

et si nous posons

$$D^2_{\Phi_1 \Phi_2} f(x) = D_{\Phi_2} [D_{\Phi_1} f(x)] ; \quad D^0_\Phi f = f ,$$

. . . .

nous obtenons de suite

$$\Phi_r = D^r_{\Phi_0 \Phi_1 \dots \Phi_{r-1}} \varphi_r = \varphi_r + \text{expression linéaire de } \varphi_0, \dots \varphi_{r-1} .$$

On a avant tout

$$\int \Phi_r \varphi_0 \, dx = \int \Phi_r \Phi_0 \, dx \; .$$

Mais l'égalité

$$\int \Phi_r \varphi_{s-1} \, dx = 0$$

entraîne l'autre

$$\int \Phi_r \varphi_s \, dx = 0 \; ,$$

dès que, si l'on suppose

$$\Phi_s = \alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_{s-1} \varphi_{s-1} + \varphi_s \; ,$$

on a aussi

$$\int \Phi_r \Phi_s \, dx = \alpha_0 \int \Phi_r \varphi_0 \, dx + \alpha_1 \int \Phi_r \varphi_1 \, dx + \dots$$

$$\alpha_{s-1} \int \Phi_r \varphi_{s-1} \, dx + \int \Phi_r \varphi_s \, dx = \int \Phi_r \varphi_s \, dx = 0 \; . \qquad (s < r)$$

Nous obtenons donc

$$\int \Phi_r \varphi_0 \, dx = \int \Phi_r \varphi_1 \, dx = \dots = \int \Phi_r \varphi_{r-1} \, dx = 0 \; .$$

Ce sont les équations qui découlent du problème de minimum

$$\int (a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \dots + a_{r-1} \varphi_{r-1} + \varphi_r)^2 \, dx = \text{minimum}$$

formulé au commencement et qui définissent la fonction ψ_r .

(Février 1914). Ugo Broggi (Buenos-Aires).