SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15525

SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

On sait quelle est, dans la théorie des ensembles de points, l'importance du théorème, dit Théorème de Cantor-Bendixson : *tout ensemble fermé F se compose d'un ensemble dénombrable D et d'un ensemble parfait P*. La première démonstration de ce théorème, due à Bendixson, était basée sur la notion importante, mais délicate et subtile de nombre ordinal transfini, et ce n'est que vingt ans plus tard que W.-H. Young[1] et quelques mois après lui E. Lindelöf[2] ont réussi à l'établir d'une manière plus directe. D'autres démonstrations de ce théorème ont été données depuis; on pourrait les diviser en deux catégories : dans celles de la première on cherche à détacher de l'ensemble donné F la partie parfaite P et on montre que l'ensemble des points non enlevés est dénombrable, dans celles de la seconde, au contraire, on détache de F la partie dénombrable et l'on fait voir que l'ensemble des points non supprimés est parfait.

Cette dernière manière me semble la plus rationnelle, voici pourquoi : les points de D (en supposant, pour simplifier qu'on se borne aux ensembles linéaires) sont répartis sur des segments ne contenant aucun point de P ; il suffit donc, pour enlever les points de D, de les enfermer dans un ensemble d'intervalles convenablement choisis. C'est par le choix de ces intervalles auxiliaires que se distinguent surtout les démonstrations que j'ai en vue.

Le plus simple, à mon avis, est d'envisager, avec F. Bernstein, l'ensemble des intervalles à extrémités rationnelles. Il suffit alors, pour détacher D, d'enlever (au sens étroit) ceux des intervalles de Bernstein qui contiennent des parties dénombrables de F, car l'ensemble enlevé est nécessairement dénombrable, et l'on voit immédiatement que l'ensemble non supprimé est parfait. Dans un

---

[1] « Sets of Intervals on the Straight Line », 1902. *Proc. Lond. Math. Soc.*, XXXV, pp. 245-268. Le théorème de C. B. découle immédiatement d'une propriété importante des ensembles fermés que W. H. Young établit à la p. 268 de ce travail. D'autres démonstrations du théorème de C. B. ont été exposées par le même auteur dans les *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), I, pp. 230-248 et *Quart. Journ. of Math.*, 35, pp. 102-116 (cf. *The Theory of Sets of Points*, pp. 53-63).

[2] *C. R.*, 137 (1903), pp. 697-700 et *Acta Mathematica*, 29, pp. 183-190.

travail intéressant inséré dans le vol. XII des *Proc. of the sect. of Sciences* de la *Kön Akad. van Wetenschappen*, L.-E.-J. BROUWER s'est servi d'un ensemble d'intervalles présentant une certaine analogie avec celui de Bernstein, mais ce qui rend l'emploi de l'ensemble de Bernstein particulièrement commode, c'est que les intervalles de cet ensemble qui recouvrent un point quelconque de la droite fondamentale n'ont pas de borne inférieure.

Toutes ces considérations s'étendent du reste immédiatement à un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Je vais montrer qu'on pourrait leur donner une forme plus intuitive dans le cas d'un ensemble linéaire.

Soit AB l'intervalle fondamental sur lequel est réparti l'ensemble donné F, que je supposerai borné. On sait que l'ensemble F se compose des extrémité A, B et des points de AB qui ne sont pas intérieurs à un ensemble d'intervalles δ répartis sur AB. Les intervalles δ sont dits intervalles contigus à F, mais je les appellerai, avec W.-H. Young, intervalles noirs; je dirai en général, qu'un point est noir, s'il n'appartient pas à F, et qu'il est blanc, s'il fait partie de F.

Soit maintenant M_1 un point quelconque de la droite à gauche de A et M_2 un point quelconque à droite de B; soient M_3, M_4, ... les milieux des intervalles δ. Pour démontrer le théorème de Cantor-Bendixson, j'envisagerai l'ensemble des intervalles $M_iM_j (i \neq j)$ que j'appellerai *crochets;* cet ensemble est dénombrable, puisque chacun des crochets est caractérisé par deux indices.

Considérons maintenant les crochets qui contiennent les parties dénombrables de F (crochets de 1^re^ espèce). L'ensemble D des points de F intérieurs à ces crochets est dénombrable; montrons que l'ensemble des points qui restent est parfait. Soit P cet ensemble.

P est fermé, car un point intérieur à un crochet de 1^re^ espèce ne saurait être point limite de P.

P est dense en lui-même. Soit en effet P_1 un point de P et d un intervalle quelconque entourant P_1. Si d ne contenait aucun point de P, autre que P_1, l'ensemble des points blancs intérieurs à d serait dénombrable; d contiendrait donc des points noirs de chaque côté de P_1 et on voit que P_1, contrairement à l'hypothèse, se trouverait à l'intérieur d'un crochet de 1^re^ espèce. Donc d contient toujours des points de P, autres que P_1, et l'ensemble P est dense en lui-même.

Cette démonstration peut être rapprochée de celle de W. H. Young, citée plus haut et de celle de Brouwer.

J'ajouterai encore que la considération des crochets peut être utile dans l'étude des problèmes relatifs à la mesure des ensembles fermés.

D. MIRIMANOFF (Genève).