

Géomètre.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1913)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LE GÉOMÈTRE.

Les premiers travaux de mathématiques pures qui illustrèrent Henri Poincaré ont trait à la théorie des fonctions abéliennes et des fonctions plus générales qu'il appela fonctions fuchsienes.

Ils apparaissent, à partir de 1880, dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. Le Mémoire fondamental intitulé *Théorie des groupes fuchsien*s inaugure magistralement les *Acta Mathematica*. On peut déjà voir de ce côté une ligne admirablement continue qui, dessinée il y a plus de trente ans, se prolonge, au travers des œuvres les plus diverses, pour aboutir au Mémoire *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques* publié encore aux *Acta Mathematica* en 1908 et qui semble ainsi dater d'hier.

Vers 1880 les travaux d'analyse semblaient les plus ardues et les plus importants étaient ceux dus aux grands géomètres alors vivants qui s'appelèrent Briot, Bouquet, Weierstrass et surtout Hermite.

La théorie des fonctions elliptiques, sans avoir peut-être le cachet classique relativement élémentaire qu'on peut lui donner maintenant, était cependant devenue parfaitement claire. On savait depuis longtemps qu'après les courbes unicursales il convenait de placer celles, telles que les cubiques, dont les coordonnées s'exprimaient en fonction elliptique, c'est-à-dire en fonction *uniforme* d'un paramètre variable. L'intuition indiquait même qu'un théorème analogue devait avoir lieu pour une courbe *algébrique* quelconque et de grands efforts étaient faits, notamment par l'école allemande, pour l'établir définitivement. Mais pour cela, il fallait apporter à la théorie des fonctions abéliennes des perfectionnements analogues à ceux dont la théorie des fonctions elliptiques avait déjà bénéficié. Ce fut la première gloire d'Henri Poincaré alors qu'une seconde, non moins éclatante, devait coïncider presque exactement avec elle.

L'école allemande, dirigée par les recherches de Fuchs, appliquait aussi avec succès les méthodes de Cauchy à l'étude

des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. On sentait vaguement que de nouvelles fonctions devaient correspondre à de telles équations, tout comme les fonctions abéliennes correspondaient à des intégrales portant explicitement sur des différentielles algébriques. D'ailleurs, les fonctions elliptiques, considérées par rapport au module, avaient naturellement conduit Hermite aux fonctions *modulaires* qui satisfaisaient à des équations différentielles linéaires, fort particulières il est vrai. Henri Poincaré généralisa les choses avec une rapidité foudroyante. Il aperçut, dans la théorie des fonctions abéliennes, les fonctions qui devaient jouer un rôle analogue à celui des fonctions modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques, et il se trouva que ces fonctions étaient celles qui intégraient les équations différentielles linéaires précédemment considérées. Il enlevait ainsi à l'Allemagne la gloire que celle-ci était sur le point de conquérir mais il fut le plus généreux des vainqueurs, envers la nation rivale, en donnant aux nouvelles fonctions le nom de *fonctions fuchsiennes*.

Il ne faudrait point maintenant considérer de tels résultats uniquement comme des triomphes du passé. Ils se mêlent de plus en plus et ont d'ailleurs été mêlés par Henri Poincaré lui-même aux recherches des géomètres de la jeune génération. Ils peuvent servir et ont effectivement servi de base à une étude générale des fonctions analytiques.

Ces fonctions forment pour le débutant un écheveau passablement compliqué, surtout si l'on veut sortir de la considération directe des fonctions uniformes. Pour en faire une étude approfondie, faudra-t-il considérer les uns après les autres tous les éléments de l'ensemble ?

Heureusement non ! Quelques fonctions seulement, adroitement choisies et dont les singularités seront étudiées à fond, constitueront de véritables clefs d'or pour l'étude de classes extrêmement étendues d'autres fonctions. Que l'on considère, par exemple, les formules de Cauchy et de Taylor qui, quoique insuffisantes pour tous les problèmes de l'analyse moderne, n'en sont pas moins les premiers instruments fondamentaux dont il faille se préoccuper. Qu'y-a-t-il d'abso-

lument essentiel dans ces formules ? Rien d'autre que la simple fraction rationnelle

$$\frac{1}{z - a}.$$

Pour parler un langage tout à fait moderne, c'est là le *noyau* de la formule de Cauchy. La singularité extrêmement simple constituée par le pôle a règle le développement de la fraction en série entière et, du même coup, les conditions d'existence du développement taylorien d'une fonction analytique *quelconque*.

Sans vouloir établir une véritable comparaison entre ces points rudimentaires et des théories d'aspects fort divers, on peut juger cependant de la puissance des méthodes appuyées sur l'étude préliminaire de fonctions présentant, au lieu du pôle simple de la fraction précédente, des singularités appartenant à d'autres types. Ainsi les célèbres théorèmes de M. Emile Picard sur l'allure d'une fonction analytique quelconque, dans le voisinage d'un point singulier essentiel, dérivent d'une propriété particulière d'une fonction modulaire particulière elle-même.

Quelle ne dût pas être la puissance d'Henri Poincaré en possession de ses fonctions abéliennes, fuchsiennes et de tous les types dérivés qu'il en tira. Le Mémoire qui prouve peut-être le mieux cette extraordinaire puissance me paraît être celui qui a trait à l'uniformisation des fonctions analytiques et auquel j'ai déjà fait allusion plus haut.

Après avoir fait l'admiration des géomètres d'il y a trente ans en complétant, après Riemann, l'uniformisation des fonctions multiformes à un nombre *fini de branches*, il arrive à des résultats analogues pour les fonctions en possédant une infinité. *Depuis lors l'étude des fonctions analytiques quelconques est ramenée à l'étude des fonctions uniformes et des transcendentes inverses de celles-ci.*

Rien qu'en ce qui précède, nous voyons déjà se dessiner une ligne admirable et grandiose. Ce n'est qu'une route indiquée dans un pays cultivé sur bien d'autres points, entre lesquels on pourrait tracer d'autres routes, mais je ne me

sens point la compétence nécessaire pour les tracer toutes, celles que je viens d'indiquer suffisant à forcer l'admiration. D'ailleurs il semblait être dans l'esprit de mon illustre maître de créer ou de s'assimiler les théories les plus générales avec des points de départ assez quelconques.

Il contribua énormément, dans ces dernières années, au perfectionnement de la théorie des équations intégrales due à M. Fredholm. Or, pour raisonner comme je le faisais tout à l'heure à propos de la formule de Cauchy, on peut encore se demander ce qu'il y a d'absolument essentiel dans ces équations intégrales. Rien d'autre que les *noyaux*. Et ces noyaux sont d'abord des potentiels ou des fonctions possédant des singularités analogues, fonctions que la Physique mathématique avait primitivement considérées mais sans faire justement la synthèse dont le mérite appartient à M. Fredholm. Henri Poincaré connaissait admirablement les fondements exposés dans ses Mémoires *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (*American Journal*, 1889. *Rendiconti*, Palerme, 1894). Il jugea la synthèse d'un coup d'œil, parut y apporter sans efforts les plus utiles contributions et reprit même ses recherches sur les marées à l'aide de la nouvelle théorie.

D'autre part, les équations intégrales correspondent à des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. A ce point de vue, Henri Poincaré fut un créateur, en étudiant les caractères de convergence des déterminants d'ordre infini.

Des fonctions analytiques à une seule variable il sut également passer avec aisance aux fonctions qui en contiennent deux ou plusieurs. Son célèbre mémoire *Sur les résidus des intégrales doubles* (*Acta Mathematica*, T. IX) contient, en ce sens, la véritable extension du théorème de Cauchy qui avait été vainement cherchée avant lui. Et il apparaît alors que la périodicité des intégrales doubles est intimement liée à celle des intégrales abéliennes.

Je m'arrête car je n'ai point l'intention, comme je l'ai déjà dit, d'écrire un article encyclopédique. Ainsi je laisse de côté les recherches sur les courbes réelles définies par des

équations différentielles. Ce n'est pas la partie la moins importante de l'œuvre car elle joue un rôle essentiel en Mécanique céleste, science sur laquelle l'illustre géomètre nous a laissé des ouvrages d'un caractère suffisamment didactique.

Au contraire il ne nous laisse rien de semblable, quant à ces fonctions analytiques auxquelles il a cependant si merveilleusement travaillé. Tout est dans des mémoires isolés. En de nombreux endroits de son *Traité d'Analyse*, M. Emile Picard nous a fait connaître des fragments de ces trésors. Les ouvrages didactiques de M. Appell sur les fonctions elliptiques, sur les fonctions algébriques et leurs intégrales, peuvent constituer aussi d'importants travaux d'approche pour qui veut s'initier aux résultats dus à Henri Poincaré; mais qui n'aurait désiré cependant que ce dernier publie lui-même un ouvrage, à début relativement élémentaire, sur les fonctions abéliennes et fuchsiennes.

Peut-être ne jugeait-il point ces théories suffisamment parfaites et préférerait-il continuer à les étendre.

Il est certain aussi que la possibilité de marcher sans cesse à de nouveaux résultats diminuait chez lui le désir de s'attarder à exposer ceux qui déjà lui semblaient acquis.

L'ASTRONOME.

Si l'Astronomie est — ne serait-ce que d'après l'étymologie du mot — l'étude des lois présidant au mouvement des astres, nul ne fut, à notre époque, plus astronome qu'Henri Poincaré.

Les lois de Képler — dont la loi de Newton est une conséquence très simple — règlent très aisément le mouvement relatif de deux corps célestes, le soleil et une planète par exemple. Que l'on adjoigne un troisième corps et l'on se trouve en présence des difficultés les plus formidables et les plus inattendues. Et cependant ce fameux Problème des trois corps s'impose absolument. Impossible de s'en tenir toujours au mouvement d'une seule planète, sans considération