SUR LA RESOLUTION GRAPHIQUE D'UN SYSTÈME DE TROIS ÉQUATIONS LINÉAIRES

SUR LA RESOLUTION GRAPHIQUE D'UN SYSTÈME DE TROIS ÉQUATIONS LINÉAIRES

La méthode de Massau pour la résolution d'un système quelconque d'équations linéaires [1] a l'intérêt d'une pleine généralité. Mais il est possible, en certains cas particuliers, d'obtenir des constructions plus simples que celles qui en dérivent. C'est ainsi que, pour le cas de trois équations linéaires, au reste quelconques, que nous écrirons

$$aX + bY + cZ = d \ ,$$
$$a'X + b'Y + c'Z = d' \ ,$$
$$a''X + b''Y + c''Z = d'' \ ,$$

nous allons faire connaître ici une solution, reposant tout simplement sur l'interprétation de ces équations en coordonnées parallèles, et qui comporte des tracés sensiblement plus simples que ceux exigés par la méthode de Massau. Pour la résolution d'un tel système, cette dernière méthode nécessite l'emploi de quatre fausses positions, alors que la solution ici indiquée n'en utilise que deux.

Faisant choix de deux axes parallèles quelconques Au et Bv, portons sur ces axes les échelles définies par

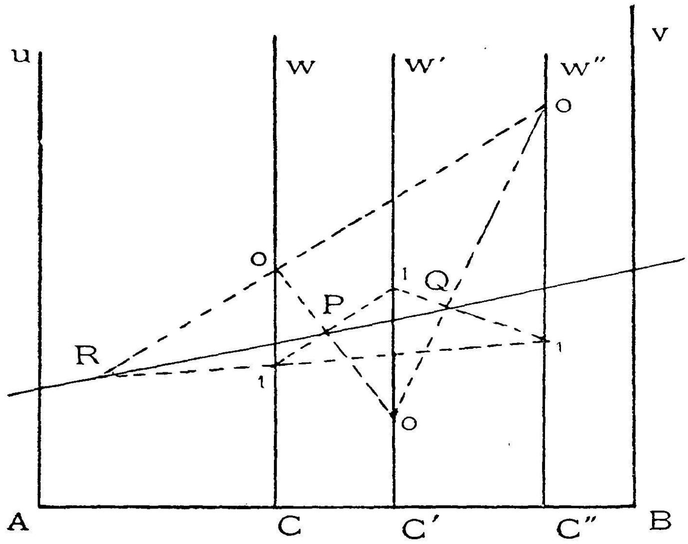
$$u = X \ , \qquad v = \lambda Y \ ,$$

λ étant un paramètre arbitraire qu'on prendra le plus souvent égal à 1, mais dont, le cas échéant, on pourra disposer comme on l'indiquera plus loin. Les trois équations ci-dessus devenant ainsi

$$a\lambda u + bv = \lambda(d - cZ) \ ,$$
$$a'\lambda u + b'v = \lambda(d' - c'Z) \ ,$$
$$a''\lambda u + b''v = \lambda(d'' - c''Z) \ ,$$

[1] Voir l'exposé de cette méthode dans mon volume : *Calcul graphique et Nomographie* (n^{os} 13 à 15).

définissent alors trois systèmes linéaires de points (Z) distribués respectivement sur les parallèles Cw, $C'w'$, $C''w''$ aux axes, telles que



$$\frac{CA}{CB} = -\frac{b}{\lambda a},$$

$$\frac{C'A}{C'B} = -\frac{b'}{\lambda a'},$$

$$\frac{C''A}{C''B} = -\frac{b''}{\lambda a''},$$

et déterminés sur ces supports par les formules

$$w = \frac{\lambda(d - cZ)}{a\lambda + b}, \qquad w' = \frac{\lambda(d' - c'Z)}{a'\lambda + b'}, \qquad w'' = \frac{\lambda(d'' - c''Z)}{a''\lambda + b''}.$$

Supposons ces cinq échelles métriques marquées sur les supports correspondants. Pour avoir la solution en X, Y, Z du système considéré, il nous faudra trouver trois points des échelles (Z) portées par Cw, $C'w'$, $C''w''$ qui, tout en ayant la même cote Z, soient alignés. La droite sur laquelle ils se trouveront coupera les échelles de Au et Bv en des points dont les cotes feront connaître les valeurs de X et Y qui, jointes à cette valeur commune de Z, constitueront le système (X, Y, Z) cherché.

Or, si nous considérons les droites unissant les points de même cote sur deux des trois échelles Cw, $C'w'$, $C''w''$, ces droites passent toutes par un même point, attendu que l'élimination de Z entre les expressions de w et w' par exemple conduit à une équation linéaire en w et w'.

Soient P, Q, R les pôles ainsi obtenus par association des mêmes valeurs de Z sur Cw et $C'w'$, $C'w'$ et $C''w''$, $C''w''$ et Cw. L'alignement cherché devra passer par chacun de ces trois pôles qui, dès lors, sont nécessairement en ligne droite.

Or, pour nous procurer l'un d'eux, nous n'avons qu'à prendre entre Cw et $C'w'$, ou entre $C'w'$ et $C''w''$, ou entre $C''w''$ et Cw, les alignements joignant les points qui correspondent à deux mêmes cotes : $Z = 0$ et $Z = 1$, par exemple.

En général, avons-nous dit, on prendra $\lambda = 1$; mais on pourra aussi disposer de ce paramètre de façon à faire varier homographiquement la figure en vue d'une disposition plus avantageuse.

Si, notamment, l'une des sommes $a + b$, $a' + b'$ ou $a'' + b''$ était nulle, l'axe $C\omega$, $C'\omega'$ ou $C''\omega''$ correspondant serait avec la valeur $\lambda = 1$, rejeté à l'infini. En choisissant pour λ une valeur quelconque ne rendant nulle aucune des quantités $\lambda a + b$, $\lambda a' + b'$, $\lambda a'' + b''$, on maintient, dans tous les cas, ces trois axes à distance finie.

M. D'OCAGNE (Paris).

DÉMONSTRATION NOUVELLE ET EXTENSION D'UN THÉORÈME DE M. G. KŒNIGS

Dans un mémoire publié en 1887[1], M. G. KŒNIGS a déterminé, par une méthode élégante, les surfaces de l'espace à trois dimensions contenant deux faisceaux de coniques.

Dans le travail actuel, j'expose une généralisation du théorème de M. Kœnigs, en ce sens que je détermine les surfaces algébriques de S_r contenant deux faisceaux de courbes rationnelles. La méthode que j'emploie est fondée sur la représentation plane des surfaces et est différente de celle de M. Kœnigs. Précisément, j'établis le théorème suivant :

I. — *Si une surface algébrique de* S_r *possède deux faisceaux de courbes rationnelles, cette surface est rationnelle et peut être représentée sur le plan de manière qu'aux courbes d'un faisceau correspondent les droites d'un faisceau et qu'aux courbes de l'autre faisceau correspondent des courbes rationnelles d'un certain ordre* μ, *le plus petit possible, passant* $\mu - \nu$ *fois par le sommet du faisceau de droites (*ν *étant le nombre de points communs aux courbes des faisceaux) et telles que leurs multiplicités en deux points-bases, divers du sommet du faisceau de droites, n'aient jamais une somme excédant* ν. *De plus, il n'y a pas de points-bases* ν*-uples et il en peut exister qu'un seul point-base dont la multiplicité surpasse* $\frac{\nu}{2}$ *(en dehors du faisceau de droites). Les courbes représentant les sections hyperplanes de la surface ne passent jamais, par deux points-bases du faisceau de courbes d'ordre* μ *dont la somme des multiplicités est* ν, *avec des multiplicités dont la somme surpasse*

---

[1] *Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques.* Annales de l'Ecole Normale sup. 1888, 3e s., t. V, p. 177. (Voir aussi C. R. 1887).