SUR LE PROLONGEMENT, PAR CONTINUITÉ. DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Autor(en): **Pompéiu, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1913)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14864

paraissent absurdes au premier abord. C'est ainsi qu'à côté de la science contemplative, une technique a dû se développer, dont le but est strictement utilitaire et qui vise seulement à accroître, par tous les moyens possibles, la puissance de la démonstration. A ne vouloir jamais descendre des cimes splendides qu'elle prétend explorer, la science se condamnerait elle-même à l'impuissance.

Pierre Boutroux (Poitiers).

SUR LE PROLONGEMENT, PAR CONTINUITÉ, DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

1. — Soient D_1 et D_2 deux domaines, simplement connexes, séparés par une ligne rectifiable L. Je suppose que les frontières C_1 et C_2 des domaines D_1 et D_2 sont aussi des lignes rectifiables.

Cela étant posé, supposons que dans D_1 se trouve définie une fonction holomorphe $f_1(z)$ prenant sur L une suite continue de valeurs ; supposons, de même, que dans D_2 se trouve définie une fonction holomorphe $f_2(z)$ prenant sur le L la même suite continue de valeurs que $f_1(z)$.

2. — M. Painlevé a démontré (dans sa Thèse : *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques,* page 27) que la fonction $f(z)$ définie de la manière suivante :

$$f(z) = f_1(z) \quad \text{dans le domaine} \quad D_1 \ ;$$
$$f(z) = f_2(z) \quad \text{dans le domaine} \quad D_2 \ ;$$
$$f(z) = f_1(z) = f_2(z) \quad \text{sur la ligne} \quad L \ ;$$

est holomorphe dans le domaine D, obtenu en supprimant la ligne L.

En d'autres termes : deux fonctions holomorphes, définies dans deux domaines contigus, et se raccordant (les fonctions) par continuité le long de la frontière commune (ligne rectifiable) se prolongent mutuellement et ne forment, dans le *domaine-somme* (obtenu en supprimant la frontière commune) qu'une seule et même fonction holomorphe.

3. — La démonstration de M. Painlevé est basée sur l'intégrale de Cauchy. Je vais donner une autre démonstration[1] basée sur une transformation de la définition des fonctions holomorphes.

---

[1] T. Levi-Civita, *Sulla continuazione analitica* [Atti e Memorie della R. Academia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova, vol. XXVIII, Dispensa I (1912), pp. 3-5].

D'après un théorème de Morera, une fonction $f(z)$ définie dans un domaine simplement connexe D est holomorphe dans ce domaine si

1° elle est continue dans D ;

2° l'intégrale

$$\int_C f(z)\,dz$$

est nulle, pour tout contour fermé C tracé dans D.

4. — Venons maintenant au théorème de M. Painlevé. On montre immédiatement que la fonction $f(z)$, définie au n° 2, satisfait aux conditions de Morera.

D'abord, elle est continue dans le domaine D.

Ensuite l'intégrale

$$I = \int_C f(z)\,dz$$

est évidemment nulle si le contour C est situé tout entier dans D_1 ou dans D_2. Supposons maintenant que ce contour fermé traverse la ligne L et, pour simplifier, supposons que C traverse L seulement en deux points : α et β.

Pour calculer l'intégrale I, on peut la décomposer en deux autres intégrales :

$$I = I_1 + I_2$$

l'intégrale I_1 étant obtenue en intégrant $f(z)$ le long d'un contour fermé C_1 formé avec la partie de C qui se trouve dans D_1 et l'arc $\alpha\beta$ de la ligne L ; de même, l'intégrale I_2 étant obtenue par l'intégration de $f(z)$ le long du contour fermé C_2, formé de la partie de C, située dans D_2 et de l'arc $\alpha\beta$ de la ligne L.

Mais, à cause de la continuité des fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sur L, on trouve facilement

$$I_1 = 0 \ , \qquad I_2 = 0 \ ,$$

d'où

$$I = 0 \ .$$

Et, ainsi, la fonction $f(z)$ satisfait, dans D, aussi à la seconde condition de Morera. Elle est donc holomorphe dans D.

5. — L'importance de ce mode de démonstration me semble résider dans ce fait qu'il permet de généraliser le théorème de M. Painlevé et de *prolonger*, par continuité, des fonctions non-holomorphes.

En effet, reprenons les domaines D_1 et D_2, définis au n° 1, mais cette fois-ci supposons que l'on définit, dans chacun de ces domaines des fonctions non-holomorphes mais appartenant à la même classe.

Voici ce que j'entends par là.

Lorsqu'une fonction $f(z)$, continue, n'est pas holomorphe l'intégrale.

$$I = \int_C f(z)\, dz$$

prise suivant un contour fermé quelconque C [tracé dans le domaine où se trouve définie $f(z)$] n'est pas nulle ; mais sa valeur peut s'exprimer quelquefois d'une manière simple en fonction du contour C. C'est cette manière d'exprimer la valeur de I en fonction de C qui sert à caractériser une classe de fonctions, et par suite à distinguer une classe des autres classes de fonctions.

Voici un exemple simple :

Supposons que la valeur de I est égale à l'aire de la région délimitée par C, multipliée par l'affixe du centre de gravité de cette région.

Nous avons défini ainsi une classe G de fonctions non-holomorphes : $g(z)$.

6. — Je dis que le théorème de M. Painlevé est généralisable à cette classe de fonctions.

En d'autres termes : si dans le domaine D_1 se trouve définie une fonction $g_1(z)$ et dans D_2 une fonction de même classe $g_2(z)$, et si ces deux fonctions se raccordent par continuité le long de la ligne L (qui sépare D_1 et D_2) la fonction $g(z)$ définie comme il suit :

$$\begin{aligned} g(z) &= g_1(z) && \text{dans } D_1 \;; \\ g(z) &= g_2(z) && \text{dans } D_2 \;; \\ g(z) &= g_1(z) = g_2(z) && \text{sur } L \;; \end{aligned}$$

est une fonction qui, dans le domaine-*somme* D, appartient à la même classe que $g_1(z)$ et $g_2(z)$.

On n'a qu'à reprendre le mode de raisonnement du n° 4 et à faire usage d'une propriété élémentaire du centre de gravité.

D'ailleurs la classe des fonctions $g(z)$ peut être définie aussi par un système d'équations aux dérivées partielles absolument analogue au système par lequel Cauchy définit les fonctions holomorphes.

7. — J'ai donné dans une Note des *Comptes Rendus*[1] la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de variable complexe, appartenant à une classe déterminée, soit prolongeable par continuité.

D. Pompéiu (Bucarest).

---

[1] T. 156, p. 376, séance du 3 février 1913. Dans cette Note des *Comptes Rendus* se trouve indiquée aussi la démonstration du texte (n° 4). En lisant cette Note, M. le prof. T. Levi-Civita a bien voulu me communiquer qu'il avait, avant moi, donné, dans les *Atti e Memorie* de l'Académie de Padoue, la même démonstration, comme application du théorème de Morera au prolongement des fonctions holomorphes.