L'énergie perdue lors de cette pulsation au point le plus bas sera, en tenant compte de (11),

$$V_n = \frac{r^2 G^2 l_n}{gI + r^2 G}, \quad \text{ou} \quad V_n = \frac{r^2 G^2}{gI + r^2 G}\left(\frac{gI}{gI + r^2 G}\right)^n l \,. \tag{15}$$

En effectuant la somme $\frac{r^2 G^2}{gI + r^2 G}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{gI}{gI + r^2 G}\right)^n l$, on trouve facilement qu'elle vaut $Gl = P$, comme on l'a indiqué précédemment.

Il serait facile de s'arranger à pouvoir fixer d'autres disques de différentes masses sur l'axe, ce qui modifierait le moment d'inertie I. On pourra étudier de cette façon l'influence de la masse sur les diverses énergies et les relations qui existent entre elles.

Arn. Emch (University of Illinois).

(Traduction de J.-P. Dumur, Genève.)

SUR LA REPRÉSENTATION DES DÉTERMINANTS PAR DES SYSTÈMES ARTICULÉS

---

1. — A propos du calcul des déterminants. — Le calcul numérique d'un déterminant est en général une opération fort laborieuse, dès que l'ordre du déterminant est un peu élevé. On s'en aperçoit notamment dans le cas assez rare où l'on a à résoudre un système d'équations du premier degré, et où il n'est pas possible de simplifier au préalable celui-ci. On sait qu'une racine est donnée par le quotient de deux déterminants identiques, à une colonne près; or on est obligé néanmoins de développer intégralement chacun des deux déterminants. Nous nous étions demandé, il y a dix ans environ, à propos du calcul d'une voûte par la méthode de l'arc élastique qui conduit à la résolution d'un système

d'équations linéaires, s'il ne serait pas possible de faire apparaître, en vue de simplifications, la partie commune des deux termes dont on cherche le quotient. Il convenait d'abord de mettre le développement d'un déterminant sous la forme d'un monôme. Nous pensâmes à appliquer aux déterminants la conception du système articulé.

2. — Déterminant articulé du second ordre. — Notre point de départ fut la considération du système articulé dans l'instrument dit « pantographe ».

Considérons le système ci-dessous ABCDEF (fig. 1) et posons :

$$AB = a_1^1, \qquad AD = a_1^2,$$

$$BC = a_2^1, \qquad DE = a_2^2,$$

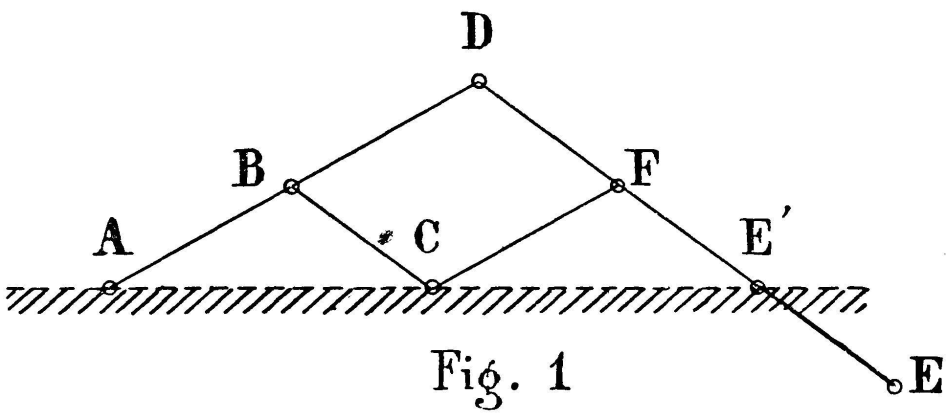

Fig. 1

on a :

$$BD = CF, \qquad DF = BC.$$

Traçons la droite ACE′ et posons :

$$EE' = \alpha_2^2$$

nous avons :

$$\alpha_2^2 = a_2^2 - \frac{a_2^1\, a_1^2}{a_1^1},$$

ou :

$$\alpha_2^2 = \frac{1}{a_1^1}(a_2^2\, a_1^1 - a_2^1\, a_1^2),$$

et en posant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

on a :

$$\alpha_2^2 = \frac{\Delta}{a_1^1} \qquad \text{ou enfin :} \qquad \Delta = a_1^1 \alpha_2^2 .$$

Autrement écrivons :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & \mathrm{DE}' + \alpha_2^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & \mathrm{DE}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & 0 \\ a_2^1 & \alpha_2^2 \end{vmatrix}$$

et comme

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & \mathrm{DE}' \end{vmatrix} = 0$$

on a :

$$\Delta = a_1^1 \alpha_2^2 .$$

3. — Déterminant articulé du troisième ordre. — Soit maintenant le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

écrivons-le :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3'^3 + \alpha_3^3 \end{vmatrix}$$

et en posant :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3'^3 \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Delta_3^3 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

on aura

$$\Delta = \Delta' + \alpha_3^3 \Delta_3^3 :$$

or on peut toujours prendre a_3^3 de façon que Δ' soit nul ; par suite on aura

$$\Delta = \alpha_3^3 \Delta_3^3 ,$$

et comme on sait que Δ_3^3 est égal à $a_1^1 \alpha_2^2$, on a en définitive :

$$\Delta = a_1^1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 .$$

Considérons maintenant le système articulé ci-dessous (fig. 2) où :

$$AB = a_1^1 , \quad BC = a_2^1 , \quad CD = a_3^1 ,$$

$$AE = a_1^2 , \quad EF = a_2^2 , \quad FG = a_3^2 ,$$

$$AH = a_1^3 , \quad HI = a_2^3 , \quad IK = a_3^3 .$$

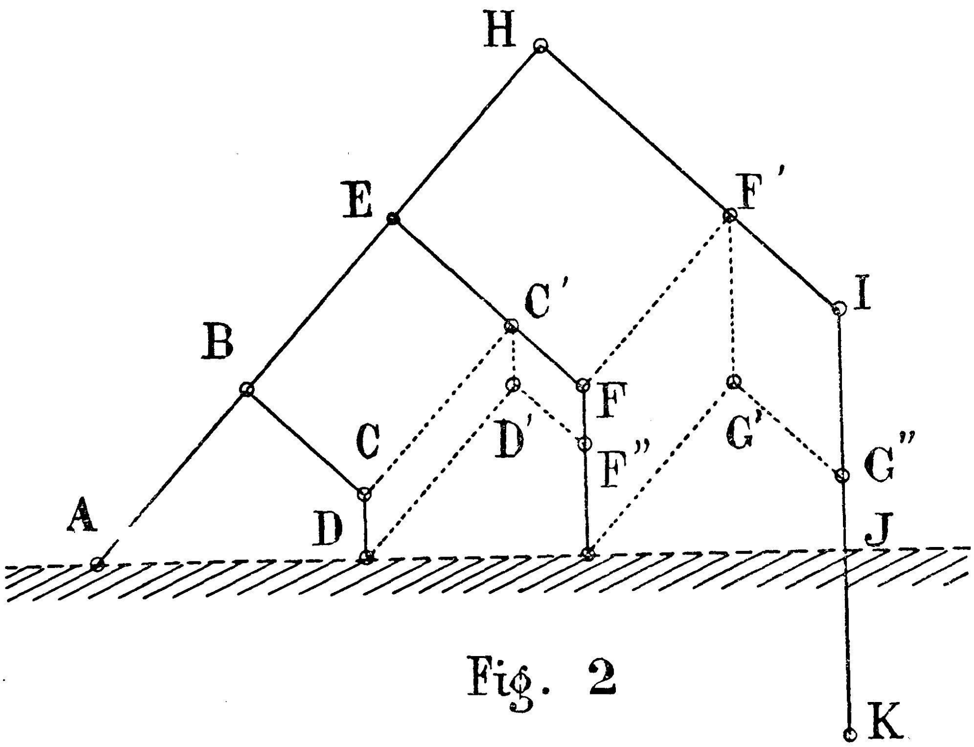

Fig. 2

Les bielles BC, EF, HI d'une part, CD, FG, IK, d'autre part, sont assujetties à rester parallèles, à l'aide de liaisons par bielles faciles à concevoir. Ayant assujetti A et D sur une règle, nous pouvons toujours déplacer le système de façon à amener G sur la même droite. Soit alors J l'intersection de cette droite avec IK, et posons $IJ = a_3'^3$.

Le déterminant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^3 \\ \ldots & & \ldots \\ a_3^1 & \ldots & a_3'^3 \end{vmatrix}$$

est nul.

En effet, projetons le système sur une perpendiculaire à AD. Soient β_1, β_2, β_3, les cosinus directeurs des côtés. On aura :

$$a_1^1 \beta_1 + a_2^1 \beta_2 + a_3^1 \beta_3 = 0 ,$$

$$a_1^2 \beta_1 + a_2^2 \beta_2 + a_3^2 \beta_3 = 0 ,$$

$$a_1^3 \beta_1 + a_2^3 \beta_2 + a_3'^3 \beta_3 = 0 .$$

Ce système a des solutions, donc Δ' est nul. Or on a :

$$\Delta = \Delta' + \mathrm{JK} \,.\, \Delta_3^3$$

et par suite

$$\Delta = \Delta_3^3 \,.\, \mathrm{JK} \qquad \text{ou} \qquad \Delta = \Delta_3^3 \,.\, \alpha_3^3 \,.$$

Il suffira donc d'aligner à la règle les trois extrémités A, D, G, et de mesurer JK sur IK pour avoir α_3^3.

On a vu d'autre part comment le système articulé ABCEF permet de déterminer α_2^2. On a donc ainsi les trois facteurs du produit qui représente Δ :

$$\Delta = a_1^1 \, \alpha_2^2 \, \alpha_3^3 \,.$$

Le système articulé du troisième ordre présente :

$3(3 - 1) + 1 = 7$	bielles	éléments
$3(3 - 1) + 2 = 8$	»	de parallélisme
Total. . . 15	»	

4. — Déterminant articulé d'ordre n. — La théorie qui précède est générale et s'applique au cas d'un déterminant d'ordre n :

$$\Delta = a_1^1 \, \alpha_2^2 \ldots \alpha_{n-1}^{n-1} \, \alpha_n^n \,.$$

On obtiendra successivement les facteurs comme ci-dessus.

Le nombre des bielles sera :

1° Bielles éléments :

$$n(n-1)+1=n^2-n+1 .$$

2° Bielles de parallélisme :

a) Bielles longitudinales (CF')

$$n-1+2(n-1)+\dots(n-1)^2=\frac{n(n-1)^2}{2} .$$

b) Bielles transversales (F'G')

$$n-1+2(n-1)+\dots(n-2)(n-1)=\frac{(n-2)(n-1)^2}{2}$$

soient $(n-1)^3$ au total pour les bielles de parallélisme et

$$N=(n-1)^3+(n-1)n+1$$

pour tout le système.

Application :

Pour

$$n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots\ 10,\ 11,\ \dots$$

on a

$$N=4,\ 15,\ 40,\ 85,\ \dots\ 820,\ 1111,\ \dots$$

5. — Résolution d'un système de n équations du premier degré à n inconnues. — Soit le système :

$$\begin{array}{l} a_1^1 x_1+\dots+a_1^n x_n=A_1 , \\ \dots \qquad\qquad \dots \\ a_n^1 x_1+\dots+a_n^n x_n=A_n . \end{array}$$

On sait que l'on a :

$$x_p=\frac{D_p}{\Delta} , \qquad \text{avec} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

et

$$D_p=\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^{p-1} & A_1 & a_1^{p+1} & \dots & a_1^n \\ \dots\dots & & & & & & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^{p-1} & A_n & a_n^{p+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix} .$$

Considérons le système articulé Δ auquel nous ajoutons une colonne — autrement dit un contour polygonal — $A_1 A_2 \ldots A_n$. soit D le système obtenu

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n & A_1 \\ \ldots & & & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n & A_n \end{vmatrix} .$$

Ce système, en laissant le contour A, donne Δ, et on calculera :

$$\Delta = a_1^1 \times \alpha_2^2 \times \ldots \alpha_n^n :$$

on calculera de même D_p en excluant le contour a^p :

$$D_p = a_1^1 \alpha_2^2 \ldots \alpha_{p-1}^{p-1} \alpha_{p+1}^{p+1} \ldots \alpha_n^n \beta_p$$

β_p étant le résidu de la dernière colonne A.

D'où

$$x_p = \frac{a_1^1 \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^n}{a_1^1 \ldots \alpha_{p-1}^{p-1} \alpha_{p+1}^{p+1} \ldots \beta_p}, \qquad \text{ou} \qquad x_p = \frac{\alpha_p^p}{\beta_p} .$$

La simplification est considérable. Ayant construit le système D, il suffira d'aligner deux fois pour avoir les résidus α_p^p et β_p^p en excluant successivement les colonnes A et a_p. Nous n'avons pas besoin de faire remarquer que la réalisation du système est très compliquée à cause du nombre des bielles, et que la méthode n'a pas d'intérêt pratique.

6. — Dilatation d'un déterminant articulé. — Les éléments d'un déterminant ne sont pas toujours des constantes. Ils peuvent être des fonctions d'une ou de plusieurs variables.

Admettons que les éléments du système articulé soient constitués par des barres métalliques de nature différente ayant des coefficients de dilatation :

$$\begin{matrix} \lambda_1^1, & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n^1, & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^n \end{matrix}$$

Si la température subit une variation t, les éléments deviennent :

$$\Delta_t = \begin{vmatrix} a_1^1 + \lambda_1^1 a_1^1 t & \dots & a_1^n + \lambda_1^n a_1^n t \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n^1 + \lambda_n^1 a_n^1 t & \dots & a_n^n + \lambda_n^n a_n^n t \end{vmatrix} .$$

On concevrait facilement le dispositif de bielles et coulisses permettant la conservation du parallélisme des éléments.

L'équation $\Delta(t) = 0$ est une équation en t du degré n, que l'on résoudra en alignant $n - 1$ extrémités et faisant varier la température pour aligner la $n^{\text{ème}}$ sur les précédentes. On conçoit donc la résolution par un procédé physique de l'équation $\Delta(t) = 0$.

7. — Equation en λ. Equation en S. — Les équations en λ et en S que l'on rencontre en géométrie analytique sont un cas particulier du précédent.

Dans le cas de $\Delta(\lambda) = 0$ on a

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1^1 + \lambda a_1'^1 & \dots & a_1^n + \lambda a_1'^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n^1 + \lambda a_n'^1 & \dots & a_n^n + \lambda a_n'^n \end{vmatrix} = 0$$

on voit qu'il faudra poser

$$\begin{aligned} \lambda a_1'^1 &= \lambda_1^1 a_1^1 t , \\ \dots\ \ & \quad\ \dots \\ \lambda a_n'^n &= \lambda_n^n a_n^n t , \end{aligned}$$

ce qui revient à choisir $\lambda_1^1 \dots \lambda_n^n$ comme suit :

$$\lambda_1^1 = \frac{a_1'^1}{a_1^1} \ . \dots \ \lambda_n^n = \frac{a_n'^n}{a_n^n} \ .$$

Dans les cas de $\Delta(S) = 0$

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} a_1^1 - S & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^1 - S & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n - S \end{vmatrix} = 0$$

il faudra poser :

$$\begin{array}{llll} \lambda_1^1 = \dfrac{1}{a_1^1} & \lambda_1^2 = 0 & \dots & \lambda_1^n = 0 \\ \lambda_2^1 = 0 & \lambda_2^2 = \dfrac{1}{a_2^2} & \dots & \lambda_2^n = 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ \lambda_n^1 = 0 & \lambda_n^2 = 0 & \dots & \lambda_n^n = \dfrac{1}{a_n^n} \end{array}$$

Pratiquement, on ne peut concevoir l'application de ce procédé que pour les racines très petites des équations en S ou en λ, ou encore dans le cas où les termes a sont très grands vis-à-vis de l'unité pour l'équation en S, et vis-à-vis des termes a' pour l'équation en λ.

Dans l'ensemble, l'intérêt pratique de ce qui précède est à peu près nul; il serait peut-être même exagéré de lui attribuer quelque intérêt théorique, cependant la méthode est curieuse, et c'est à ce titre que nous l'avons exposée.

F. BUTAVAND (Alger).