POUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

POUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

L'idée de *mesure* est à la base de toutes les applications des Mathématiques. C'est à elle que l'on doit l'introduction du nombre dans le domaine physique et, par conséquent, la soumission, bien qu'encore incomplète, de ce domaine aux Mathématiques. Elle est, ainsi que l'a fait observer un biologiste doublé d'un clairvoyant psychologue, l'élément primordial et indispensable de toute science[1]. Il est donc permis de regretter la parcimonie avec laquelle quelques considérations, d'ailleurs généralement dépourvues de précision, lui sont consacrées dans les cours d'Arithmétique et de voir là une lacune à combler.

En outre, la Géométrie métrique (la seule encore dont les principes soient nettement établis) est, en définitive, l'étude d'un système de mesure, de sorte que c'est aussi dans une théorie générale de la mesure que la Géométrie (en sa substance purement rationnelle) doit trouver son véritable fondement.

On se propose, dans ce premier article, de rechercher quels pourraient être les éléments essentiels d'une théorie purement rationnelle de la mesure pour les continus à une dimension.

§ I.

On entend, en général, par *grandeur*, ce qui est susceptible de mesure, c'est-à-dire susceptible de représentation numérique, et l'on distingue deux sortes de grandeurs, celles que l'on représente au moyen des nombres naturels et celles que l'on représente au moyen du continu numérique.

[1] F. LE DANTEC, *Science et conscience ;* Paris, 1908.

Pour les premières, le mécanisme de la représentation est si simple et si naturel qu'il paraît inutile de s'y arrêter.

La question est loin d'être aussi facile pour les grandeurs de la deuxième catégorie. Le continu numérique (ou l'ensemble des nombres réels, nous faisons ici une confusion sans conséquence), bien que *dense*, est composé d'éléments *distincts*, tandis que l'*individualité* disparaît du domaine physique justement lorsque l'on s'efforce d'y introduire la précision. Les grandeurs physiques, pour pouvoir être représentées numériquement, doivent donc subir une transformation, toute conventionnelle d'ailleurs, qui en fait les êtres purement rationnels que sont les *ensembles applicables sur le continu numérique*. Ce sont ces ensembles auxquels l'on doit donner le nom de *continus*. La notion de ces ensembles ordonnés, étant ainsi purement rationnelle, peut évidemment être établie, en dehors de toute intuition expérimentale, par des procédés purement logiques et, par suite, la notion de mesure acquiert elle-même un caractère franchement rationnel et prend place dans le domaine proprement mathématique.

Puisqu'un continu, par définition, peut toujours être supposé appliqué sur le continu numérique (ou l'ensemble des nombres réels), il doit suffire de développer sur celui-ci la notion de mesure. On peut pourtant donner à cette notion une définition susceptible de s'appliquer à d'autres ensembles ordonnés que les continus.

Supposons que l'on ait pu définir, pour les segments[1] d'un ensemble ordonné M, une « relation d'égalité[2] » satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Etant donné un segment $(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2)$, *il existe toujours, à droite d'un élément quelconque,* m'_1 *de l'ensemble, un et un seul*

[1] J'appelle *segment* d'un ensemble ordonné l'ensemble formé par les éléments compris entre deux éléments déterminés et par ces deux éléments.

[2] Définir, pour les éléments d'un ensemble, une « relation d'égalité », c'est répartir ces éléments en ensembles s'excluant deux à deux, de sorte que chaque élément m n'est contenu que dans un seul de ces ensembles partiels, que l'on peut, par conséquent, désigner par $\mathrm{F}(m)$; la relation d'égalité entre deux élements pourra alors s'exprimer sous la forme :

$$\mathrm{F}(m) = \mathrm{F}(m')$$

où le signe $=$ exprime l'identité de deux ensembles et possède, par suite, toutes ses propriétés habituelles.

élément m'_2 *tel que les deux segments* (m_1, m_2) *et* (m'_1, m'_2) *soient « égaux »*.

b) Si les deux groupes ordonnés de trois éléments (m_1, m_2, m_3), (m'_1, m'_2, m'_3) *sont tels que les segments* (m_1, m_2) *et* (m'_1, m'_2) *d'une part,* (m_1, m_3) *et* (m'_1, m'_3) *d'autre part, sont égaux, il en doit être de même des segments* (m_2, m_3) *et* (m'_2, m'_3).

On dira alors que l'on a défini pour l'ensemble M (ou mieux pour ses segments) un *système de mesure*.

On peut aussi individualiser ce qu'ont de commun les segments égaux entr'eux et en faire un « abstrait rationnel », auquel on peut donner le nom de *grandeur*. La proposition (b) est alors équivalente à la suivante : « trois éléments m_1, m_2 et m_3 étant donnés, la grandeur du segment (m_1, m_3) est déterminée en fonction des grandeurs a et b des segments (m_1, m_2) et (m_2, m_3) ». On l'appelle *somme* des grandeurs a et b et on la désigne par l'expression $a + b$; sa définition s'exprime alors par la formule

$$(m_1, m_2) + (m_2, m_3) = (m_1, m_3) ,$$

d'où l'on déduit facilement la propriété suivante :

$$(a + b) + c = a + (b + c) .$$

On peut généraliser les notions qui viennent d'être établies (y compris celle d'addition) en faisant abstraction de l'idée d'ordre. Il est intéressant de remarquer qu'une relation d'égalité satisfaisant à ce qui subsiste alors des conditions (a) et (b) ne suffit pas pour ordonner l'ensemble M. On en a un exemple dans la notion de vecteur en Géométrie, qui détermine évidemment une telle relation pour les couples de points de l'espace.

Pour développer en toute généralité une théorie de la mesure pour les ensembles ordonnés à une dimension, il y aurait lieu d'abord de déterminer ceux de ces ensembles qui comportent des relations d'égalité satisfaisant aux conditions (a) et (b). On se bornera dans ce qui va suivre à déterminer les systèmes de mesure ou *métriques* dont est susceptible l'ensemble des nombres réels, pris comme type des continus à une dimension.

§ II.

Une relation d'égalité de l'espèce définie plus haut est alors exprimée par l'égalité des valeurs d'une fonction numérique binaire et le problème revient, par suite, à déterminer les fonctions $F(x_1, x_2)$ de deux variables qui satisfont aux deux conditions suivantes, équivalentes aux conditions (a) et (b).

a') $F(x_1, x_2)$ est une fonction croissante de x_2, décroissante de x_1 et prend toutes les valeurs comprises entre ses valeurs extrêmes lorsque l'une des variables décrit un segment ;

b') il existe une relation entre les valeurs des trois expressions $F(x_1, x_2)$, $F(x_1, x_3)$, $F(x_2, x_3)$.

En se bornant aux fonctions analytiques (ou, du moins, dérivables), il est facile de déterminer la forme générale des fonctions possédant la propriété (b').

Les expressions $F(x_1, x_2)$, $F(x_1, x_3)$ et $F(x_2, x_3)$ peuvent en effet être considérées comme trois fonctions de trois variables indépendantes x_1, x_2 et x_3 ; la condition pour qu'il existe une relation entre ces trois fonctions est que leur déterminant fonctionnel soit nul, ce qui s'écrit, en désignant respectivement par F'_1 et F'_2 les fonctions dérivées de F par rapport à ses deux arguments,

$$F'_1(x_1, x_2)\, F'_1(x_2, x_3)\, F'_2(x_1, x_3) + F'_2(x_2, x_3)\, F'_2(x_1, x_2)\, F'_1(x_1, x_3) = 0$$

ou

$$F'_1(x_1, x_2)\, \frac{F'_2(x_1, x_3)}{F'_1(x_1, x_3)} + F'_2(x_1, x_2)\, \frac{F'_2(x_2, x_3)}{F'_1(x_2, x_3)} = 0 .$$

En égalant x_3 à une constante et posant

$$\int \frac{F'_2(x, x_3)}{F'_1(x, x_3)}\, dx = f(x) ,$$

l'égalité précédente est une équation aux dérivées partielles en x_1 et x_2 et sa solution générale est

$$F(x_1, x_2) = \Phi\left[f(x_2) - f(x_1)\right] .$$

Il est vraisemblable que ce résultat est indépendant de la condition de dérivabilité, qui a été admise pour sa démonstration, et que les fonctions non dérivables ou même discontinues satisfaisant à la condition (b') doivent pouvoir se mettre sous la forme précédente. Mais, pour satisfaire aux conditions (a'), il est nécessaire que $f(x)$ soit une fonction croissante ou décroissante, toujours déterminée et prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ (elle est, par suite, continue).

Il est évident d'ailleurs que toute fonction de F définit la même métrique, car elle définit la même relation d'égalité pour les segments. Parmi les fonctions définissant la même métrique, une jouit de propriétés particulières, c'est

$$f(x_2) - f(x_1) ;$$

pour cette fonction la relation fondamentale prend la forme

$$f(x_3) - f(x_1) = \Big[f(x_2) - f(x_1)\Big] + \Big[f(x_3) - f(x_2)\Big] .$$

Deux segments quelconques (x_1, x_2) et (x_3, x_4) donnent toujours lieu à un nombre défini par l'expression

$$a = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

et qui est leur *rapport* dans la métrique considérée. Les rapports des divers segments à un segment choisi arbitrairement sous le nom d'*unité* sont dits les *mesures* de ces segments.

Observons enfin que rien n'empêche de prendre pour abscisse $f(x)$, de sorte qu'une fonction métrique pourra toujours se mettre sous la forme $x_2 - x_1$.

L'exposé précédent a été développé sur l'ensemble numérique afin de simplifier les démonstrations et de pouvoir s'appuyer sur des propriétés connues. Mais il est facile de se rendre compte que les résultats, dans ce qu'ils ont d'essentiel, peuvent être établis au moyen de raisonnements directement développés sur les continus, indépendamment de toute application préalable de ces derniers sur l'ensemble numérique, et en faisant seulement intervenir, outre les propriétés générales des continus, les propriétés (a) et (b) de la relation d'égalité qui définit une métrique. Il suffira de rappeler que la notion de rapport s'établit, par les procédés classiques[1], au moyen de ces deux propriétés des continus : divisibilité d'un segment quelconque en n segments égaux entr'eux et existence, deux segments quelconques étant donnés, de multiples de l'un plus grands que l'autre (axiome d'Archimède).

On sait que ces deux propriétés appartiennent aussi à l'ensemble des nombres rationnels ; cet ensemble admet, par conséquent, des métriques ayant les mêmes caractères essentiels. Dès lors une remarque s'impose. Rien n'empêche de substituer, dans toutes les applications des Mathématiques, l'ensemble des nombres rationnels à l'ensemble des nombres réels[2]. Il est évident que la précision que comporte l'expression mathématique n'en resterait pas moins illimitée, seulement le rapport de deux segments serait toujours rationnel, les segments devenant tous, par hypothèse, commensurables entr'eux.

Il est clair que, dans la pratique, rien ne serait changé dans la manière d'opérer actuelle ; mais l'on peut conclure de là que, contrairement à une idée courante, la notion de nombre irrationnel n'est nullement inhérente à celle de mesure et qu'elle n'est nullement nécessaire aux applications mathématiques ; cette notion appartient donc essentiellement et exclusivement, — ainsi que le fait d'ailleurs observer M. F. Klein dans son profond ouvrage : *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*, — au domaine des *Mathématiques exactes*, c'est-à-dire à l'analyse numérique.

§ III.

On a vu qu'à toute métrique est associée une opération sur les segments ou plutôt sur leurs grandeurs, qui peut être définie de la manière suivante :

---

[1] Cf. R. Baire, *Leçons sur les Théories générales de l'Analyse*, p. 33 à 39 ; Gauthier-Villars, Paris, 1907.

[2] Il suffit, pour cela, de convenir que tout segment est un ensemble *dense* et *dénombrable ;* cette convention remplacerait simplement celle qui affirme l'existence des éléments limites et qui est spéciale aux continus.

La grandeur d'un segment formé par l'ensemble de deux segments dont l'un a pour élément initial le dernier élément de l'autre ne dépend évidemment que des grandeurs a et b des segments composants ; on l'appellera *somme* de ces grandeurs et on la désignera par $a + b$. L'opération binaire ainsi définie pour les grandeurs peut être appelée « opération d'addition ».

De deux segments ayant le même élément initial et ayant des grandeurs différentes a et b si le premier contient le second, on écrira $a > b$, la relation étant évidemment indépendante de l'élément initial choisi. On définit ainsi une relation d'ordre pour les grandeurs des segments.

En s'appuyant sur les propriétés (a) et (b) caractéristiques des relations d'égalité métriques, on démontre facilement que les opérations d'addition possèdent les propriétés suivantes :

$$\text{(I)} \left\{ \begin{array}{lll} (1) & a + b = x \,, & \text{a toujours une solution en } x \,, \\ (2) & a + b > a \,, & \\ (3) & \text{si} \quad b > a \,, \; a + x = b & \text{a toujours une solution en } x \,, \\ (4) & (a + b) + a = a + (b + c) \,. & \end{array} \right.$$

On reconnaîtra sans difficulté que, si l'on a défini, pour les segments ayant une même origine, une opération binaire possédant les propriétés (I), elle permettra de définir une relation d'égalité métrique et, par suite, une métrique.

La propriété essentielle des opérations d'addition est l'*associativité* exprimée par la formule (4). Quant à la *commutativité*, qui n'est pas indispensable, l'on reconnaît facilement qu'elle équivaut à la propriété supplémentaire des relations d'égalité qui permettrait de substituer à la condition (b) la proposition suivante : *deux segments composés de parties respectivement égales sont égaux ;* cette propriété est évidente, notamment, lorsqu'il est possible de diviser deux segments quelconques en parties toutes égales entr'elles.

A toute métrique est associé un *groupe de tranformations* que l'on peut définir de la manière suivante : m_0 et m_1 étant deux éléments fixes, à tout élément m de l'ensemble situé à droite de m_0 on peut faire correspondre un autre élément m' tel que l'on ait :

$$(m_1 \,,\, m') = (m_0 \,,\, m) \,.$$

On détermine ainsi une application (au moins partielle) de l'ensemble sur lui-même, c'est-à-dire une *transformation*. Si l'élément m_1 est considéré comme un paramètre variable, on obtient ainsi une série de transformations, et il est facile de reconnaître que la proposition (*b*) exprime précisément la condition pour que ces transformations forment un groupe, c'est-à-dire pour que la transformation obtenue par l'application successive de deux d'entre elles appartiennent aussi à la série. Il est évident en outre que ces transformations *conservent la métrique*, c'est-à-dire que les segments transformés de deux segments égaux sont encore égaux.

En désignant par a la grandeur du segment (m_0, m_1), qui joue le rôle de paramètre, l'équation du groupe peut s'écrire :

$$(m_0, m') = a + (m_0, m) ,$$

et, si b est le paramètre d'une transformation du groupe faisant correspondre à l'élément m' un élément m'', on aura :

$$(m_0, m'') = b + (m_0, m') = b + a + (m_0, m) .$$

Le paramètre de la transformation résultante est donc $b + a$.

A la métrique est associé un autre groupe de transformations, qui peut être défini par l'égalité :

$$(m, m') = a ,$$

où a est un segment qui détermine la transformation dans le groupe. En appliquant ensuite la transformation

$$(m', m'') = b ,$$

on obtient évidemment la transformation

$$(m, m'') = a + b ,$$

qui appartient bien à la série, ce qui prouve que celle-ci constitue bien un groupe.

Lorsque l'opération d'addition afférente à la métrique est commutative, les deux groupes se confondent ; c'est le cas pour les continus, pour lesquels l'équation du groupe prend la forme :

$$f(x') - f(x) = a .$$

On verrait enfin que l'on peut aussi définir la métrique en fonction de l'un des groupes de transformations qui lui sont associés.

Une métrique peut donc être définie de trois manières différentes, savoir : au moyen d'une *relation d'égalité* applicable aux segments et pouvant être déterminée, dans le cas des continus, par une fonction numérique de deux éléments, au moyen d'une *opération d'addition* définie pour les segments, enfin au moyen d'un *groupe de transformations* se rapportant aux éléments mêmes de l'ensemble ordonné primitif. Ces trois points de vue se complètent l'un l'autre et les trois modes de définition peuvent trouver des applications dans le domaine physique.

On examinera dans un prochain article de quelle manière doit être généralisée la notion de mesure pour pouvoir s'appliquer aux continus à plusieurs dimensions.

G. COMBEBIAC (Montauban).

SUR LE MOMENT MAGNÉTIQUE

A PROPOS DES DEUX SIGNIFICATIONS DU TERME DE MOMENT DANS LA MÉCANIQUE

ET SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ MAGNÉTIQUES

I. — Centre de gravité et équilibre d'un corps pesant tournant autour d'un point fixe. — Rappelons que dans la théorie des forces parallèles, on appelle *moment d'une force par rapport à un plan* le produit de la force par la distance de son point d'application au plan, et qu'on démontre que le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes. Etant donnée une force de direction constante et proportionnelle à l'élément de masse, telle que la pesanteur, et un système d'axes rectangulaires dont l'origine est choisie arbitrairement, on détermine la position du centre