

**K. Hensel. — Theorie der algebraischen Zahlen,  
Band I. — 1 vol. in-8° de XI-349 pages, 14 M. ;  
B. G. Teubner, Leipzig.**

Autor(en): **Dumas, Gustave**

Objektyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

que les notions d'équations aux variations et d'invariants intégraux qui jouent un rôle si considérable dans les travaux de M. Poincaré sont aussi rattachées au Calcul ici présenté, j'aurai donné de l'œuvre une idée qui, quoique fort incomplète, montre assez le rôle capital qu'elle est appelée à jouer dans la Science.

A. BUHL (Toulouse).

K. HENSEL. — **Theorie der algebraischen Zahlen**, Band I. — 1 vol. in-8° de XI-349 pages, 14 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

L'attention des plus grands géomètres de toutes les époques a toujours été retenue par les belles propriétés des nombres, mais ce n'est qu'avec Gauss qu'a commencé l'exploration pour ainsi dire systématique des lois auxquelles ils sont assujettis. Les recherches de Gauss lui-même sur les résidus biquadratiques furent la suite naturelle des mémorables *Disquisitiones arithmeticae*, comme plus tard aussi celles de Kummer relatives aux équations de la division du cercle. La théorie des résidus biquadratiques ne prit une forme satisfaisante que lorsque Gauss eut fait entrer dans le champ de ses considérations les quantités rationnelles complexes de la forme  $a + bi$ , tandis que Kummer ne put étendre aux corps de nombres dont il s'occupait la proposition fondamentale de l'arithmétique élémentaire qui dit que tout nombre entier n'est décomposable que d'une seule façon en un produit de facteurs premiers, que par l'introduction de ses nombres idéaux.

Dedekind, Kronecker puis Hensel ont ensuite donné des méthodes permettant d'étendre à un corps algébrique quelconque toutes les merveilleuses lois mises en évidence par Gauss dans ses *Disquisitiones*. Leurs recherches, tout à fait indépendantes, ont conduit, ainsi que cela devait être, aux mêmes résultats. Considérées les unes à côté des autres, elles s'expliquent mutuellement et à cause de la différence de leur point de départ jettent un jour fort net sur la nature du nombre en général. Ceci s'applique entre autres aux conceptions fondamentales de Dedekind et de Hensel. Les idéaux du premier ont leur raison d'être dans les diviseurs du second, diviseurs dont ils sont cependant, et en une certaine mesure, la réalisation concrète.

Le livre dont nous donnons ici l'analyse est le fruit de dix-huit années de travail. Les méthodes qu'on y rencontre s'appuient sur une généralisation hardie du concept de nombre. A côté des nombres rationnels ordinaires et des nombres algébriques proprement dits, M. Hensel introduit de nouveaux éléments, constitués par des suites *indéfinies*, le plus souvent divergentes :

$$(1) \quad A = \sum_{\nu=\rho}^{\nu=\infty} e_{\nu} p^{\nu} \quad \text{et} \quad (2) \quad B = \sum_{\nu=\rho}^{\nu=\infty} \varepsilon_{\nu} \pi^{\nu} .$$

Le terme « *Nombre-à-base-p* » les caractérisent entièrement<sup>1</sup>.

Dans les A, qui seront appelés « *Nombres-à-base-p rationnels* » les coefficients  $e_{\nu}$  sont des nombres rationnels quelconques. Ces  $e_{\nu}$  sont astreints à la seule condition d'être entiers par rapport à  $p$ , c'est-à-dire d'être des nombres dont le dénominateur, dans l'expression réduite, n'est pas divisible

<sup>1</sup> Voir la note bibliographique consacrée par M. HADAMARD au livre dont il s'agit ici. *Revue générale des Sciences*, Année 1909, p. 961. Le terme « *Nombre-à-base-p* » (Nombre écrit avec une majuscule) est la traduction par M. Hadamard de celui de « *p-adische Zahl* » adopté par M. Hensel.

par le nombre  $p$  qui, par hypothèse, est un nombre premier. Les exposants  $\nu$  sont des entiers, dont le premier  $\rho$  peut d'ailleurs être négatif.

Les quantités

$$A_k = e_\rho p^\rho + e_{\rho+1} p^{\rho+1} + \dots + e_{k-1} p^{k-1}, \quad (k = \rho, \rho + 1, \dots)$$

seront, par définition, les *valeurs approchées* de  $A$ , dans le domaine de  $p$ .

Deux Nombres-à-base- $p$ ,  $A$  et  $A'$ , sont *égaux dans le domaine de  $p$* , lorsque leurs valeurs approchées  $A_k$  et  $A'_k$ , pour des  $k$  suffisamment grands sont toujours congrues entre elles pour des modules égaux à des puissances de  $p$  aussi élevées qu'on veut.

Ajoutant à ces définitions celles qui correspondent aux opérations fondamentales de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication et division), on en conclut ensuite que les Nombres-à-base- $p$  rationnels constituent dans leur totalité un corps  $K(p)$ <sup>1</sup>.

Un Nombre-à-base- $p$  rationnel est d'*ordre  $k$* , si ses valeurs approchées sont toutes exactement divisibles, par rapport à  $p$ , par  $p^k$ ; autrement dit, si ces valeurs sont successivement égales à  $p^k$  multiplié par une fraction, qui, sous forme réduite, n'a ni son numérateur ni son dénominateur divisible par  $p$ . Cet ordre sera, en général, égal à l'exposant de la première puissance de  $p$  entrant dans l'expression du Nombre-à-base- $p$ , car, de tous les développements qui peuvent correspondre à un même Nombre-à-base- $p$ , celui qu'on rencontre le plus souvent se présente sous forme *réduite*, c'est-à-dire avec coefficients égaux à 0, 1, 2... ou  $p - 1$ .

Les éléments  $B$  peuvent s'appeler « Nombres-à-base- $p$  algébriques ». Ils se rattachent par leur définition à une équation déterminée

$$(3) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

à coefficients rationnels entiers, irréductible dans le domaine de  $p$ , c'est-à-dire avec premier membre indécomposable en un produit de polynômes dont les coefficients appartiendraient au corps  $K(p)$ .

Soit  $\alpha$  l'une des racines de (3) et  $\pi$  l'un des nombres d'ordre minimum par rapport à  $p$ , du corps algébrique (au sens classique) se rattachant à  $\alpha$ . On a  $\pi^e = p\beta$ , où  $\beta$  représente un nombre algébrique entier par rapport à  $p$ , non divisible algébriquement par  $p$ , et  $e$  un nombre entier.  $\pi$  est, dans le corps considéré, diviseur premier de  $p$ . Les  $\varepsilon_\nu$  désignent en outre toute quantité de ce même corps, entière par rapport à  $p$ .

Si l'on considère alors la totalité des éléments  $B$  de (2) où les  $\varepsilon_\nu$  et  $\pi$  ont la signification qui vient de leur être donnée, on voit que ces éléments constituent à leur tour un nouveau corps que M. Hensel désigne par  $K(p, \alpha)$ .

$\pi$  est en général égal à  $p$ . Il n'en diffère que lorsque  $p$  est un diviseur du discriminant de l'équation (3).

Les définitions de l'égalité de deux Nombres-à-base- $p$  algébriques, et celle de l'ordre par rapport à  $\pi$ , sont en tous points semblables à celles qui ont été rappelées touchant les Nombres-à-base- $p$  rationnels.

<sup>1</sup> Voir à ce propos : HENSEL, *Ueber die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper* (Journal de Crelle, t. 137, p. 183 à 210). — STEINITZ, *Algebraische Theorie der Körper* (Ibid., t. 138, p. 167 à 310). — Ces deux récents travaux mettent en lumière un grand nombre de points importants. Beaucoup de détails de la présente analyse sont empruntés au premier d'entre eux.

$K(p)$  et  $K(p, \alpha)$  jouissent des propriétés communes à tous les corps. Il en résulte que la plupart des propositions de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaires s'y transportent simplement. On verrait, en particulier, qu'un produit de Nombres-à-base- $p$  appartenant à  $K(p)$  ou à  $K(p, \alpha)$  ne peut être nul que s'il en est de même de l'un de ses facteurs<sup>1</sup>; que tout polynôme, dont les coefficients sont des Nombres-à-base- $p$ , n'est décomposable que d'une seule façon en un produit de polynômes de même nature; etc.

Ces préliminaires établis, passons à ce qui sert de base à toute la théorie.

Soit  $K(\omega)$  le corps algébrique (au sens classique) qu'on se propose d'étudier et

$$(4) \quad F(x) = 0$$

l'équation de degré  $n$ , à coefficients rationnels, irréductible (au sens classique), par lequel il est défini.

$p$  représentant alors un nombre premier, il existe toujours, en correspondance avec (4) et défini par une équation de même nature que (3), un corps  $K(p, \delta)$  de Nombres-à-base- $p$  algébriques tel que le premier membre de (4) soit, dans ce corps, décomposable d'une manière unique en un produit

$$(5) \quad F(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n) \quad (p)$$

de facteurs du premier degré<sup>2</sup>.

Cette dernière égalité n'a d'ailleurs, au point de vue analytique ordinaire, qu'un sens tout à fait formel et signifie, qu'effectuant les opérations symbolisées par son second membre où les  $\xi_i$  sont des Nombres-à-base- $p$  algébriques du corps  $K(p, \delta)$ , on tomberait sur un polynôme en  $x$  dont les coefficients seraient, au sens donné plus haut pour l'égalité de deux Nombres-à-base- $p$ , égaux à ceux de  $F(x)$ .

La relation (5) établit, en outre, entre les racines de (4) et les  $\xi_i$ , une correspondance uniforme dont on fera usage dans toutes les questions où peut intervenir la divisibilité par  $p$  des éléments du corps  $K(\omega)$ .

La puissance exacte de  $p$ , entrant comme diviseur dans le discriminant du nombre  $\omega$  s'obtiendrait, par exemple, en remplaçant, dans le déterminant qui le représente,  $\omega$  et toutes ses valeurs conjuguées par leurs expressions en fonction des  $\xi_i$ . Ce déterminant, tous calculs faits, deviendrait égal à un Nombre-à-base- $p$  rationnel d'où l'on déduirait de suite la puissance cherchée.

Les systèmes fondamentaux dans  $K(\omega)$  s'obtiennent rapidement aussi par des procédés analogues.

Ces opérations sont légitimes par le fait que toute relation rationnelle à coefficients rationnels reliant entre eux un nombre quelconque d'éléments

<sup>1</sup> Cette proposition n'est vraie pour les éléments de  $K(p)$  que parce que  $p$  est un nombre premier. Elle n'est vraie aussi pour ceux de  $K(p, \alpha)$  que parce que l'équation à laquelle se rattache ce corps est, par hypothèse, irréductible dans le domaine de  $p$ . Un élément de  $K(p)$  ou de  $K(p, \alpha)$  est nul lorsque tous ses coefficients  $e_\nu$  ou  $\varepsilon_\nu$  sont tous divisibles par  $p$ .

<sup>2</sup> Toute équation admet une infinité de pareils « corps de réduction »  $K(p, \delta)$ ; mais les résultats auxquels on est conduit par l'adoption de l'un ou de l'autre restent identiques. Voir le mémoire cité de M. Hensel.

du corps  $K(\omega)$  se trouve encore vérifiée, dans le domaine de  $p$ , lorsqu'on y remplace ces éléments par les suites qui leur correspondent et qui se déduisent des  $\xi_i$ .

Tout se passe d'ailleurs de la même façon que s'il s'agissait de fonctions algébriques se rattachant à une équation  $F(y, x) = 0$ . Ces différentes fonctions sont développables dans le voisinage d'un point quelconque,  $x = a$ , en séries ordonnées suivant les puissances croissantes, entières ou fractionnaires, de  $x - a$ .

Mais l'analogie se poursuit plus loin encore. Le premier membre de (4) peut être irréductible, ou décomposable, d'une seule façon, en un produit de facteurs irréductibles dans le domaine de  $p$ .

On aura, par exemple, les  $f_i(x)$  représentant des polynômes dont les coefficients seront des Nombres-à-base- $p$  rationnels,

$$(6) \quad F(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_\lambda(x) \quad (p)$$

de sorte qu'on voit que les  $\xi_i$ , ou ce qui revient au même, que les racines (au sens classique) de  $F(x)$  se répartissent en *cycles* dans le domaine de  $p$ . Ce résultat fondamental s'obtient par comparaison des seconds membres de (5) et (6), qui, formellement et tous calculs faits, sont évidemment identiques.

A chaque cycle d'une fonction algébrique  $\gamma$  correspond, comme on sait, un point P de la surface de Riemann relative à  $\gamma$ . On peut dire aussi que ce point P, qui se rapporte d'ailleurs à une valeur déterminée,  $x = a$  de  $x$ , symbolise l'un des facteurs, irréductible dans le voisinage de  $x = a$ , du polynôme  $F(y, x)$  qui donne naissance à la fonction  $\gamma$ .

Si la fonction algébrique  $z = \varphi(x, y)$  est au point P d'ordre déterminé  $k$ , cela peut s'exprimer en disant que  $z$  est en ce point divisible exactement par  $P^k$ . Cette notion, dont M. Hensel a tiré le plus grand parti dans ses nombreux mémoires et dans son grand traité sur les fonctions algébriques, intervient de nouveau ici dans la définition des *diviseurs premiers algébriques*. Ceux-ci sont des symboles  $\mathfrak{p}$  que M. Hensel fait correspondre à tous les diviseurs irréductibles de  $F(x)$  dans les domaines respectifs de tous les nombres rationnels  $p$ .

Ces diviseurs premiers se rattachent ainsi respectivement à chaque cycle de racines de  $F(x) = 0$ . Ils sont indépendants de la quantité primitive du corps considéré. Les premiers membres des équations que vérifient ces quantités sont, en effet, décomposables de la même façon que  $F(x)$  en facteurs irréductibles dans le domaine de chaque nombre premier  $p$ .

Une quantité  $\beta$  du corps  $K(\omega)$  sera, d'autre part, divisible par  $\mathfrak{p}^k$ , si, dans le cycle qui correspond à  $\mathfrak{p}$ ,  $\beta$  se trouve, par rapport à la puissance fractionnaire de  $p$  dont ce dernier dépend d'un ordre égal à  $k$ . Ceci se justifie, en remarquant qu'à chaque diviseur  $f_i(x)$  de  $F(x)$  correspond par l'intermédiaire d'une équation analogue à l'équation (3), un corps bien déterminé de Nombres-à-base- $p$  algébriques. L'exposant  $k$ , toujours entier, de  $\mathfrak{p}$  est l'ordre par rapport à  $\pi$  du Nombre-à-base- $p$  algébrique qui correspond dans ce corps à  $\beta$ .

De la notion de diviseur premier, on passe à celle de *diviseur* en général. On nomme ainsi un produit de puissances de diviseurs premiers. A cette définition vient s'ajouter celle du nombre algébrique multiple d'un diviseur

donné, notion immédiate, d'après ce qui précède, et qui conduit à celle d'idéal.

Les multiples d'un diviseur donné constituent dans le corps considéré un idéal et à chaque idéal se rattache ainsi un diviseur de Hensel, plus grand commun diviseur en quelque sorte de tous les éléments de l'idéal. Le théorème fondamental de l'arithmétique élémentaire prend, enfin, chez M. Hensel, la forme suivante : « *Tout nombre algébrique entier est égal (ou équivalent) au produit, d'ailleurs unique et bien déterminé, de ses diviseurs premiers.* »

Telle sont, sans qu'il soit possible d'entrer dans le moindre détail, dans leurs grandes lignes et en traits généraux, les notions essentielles qu'on rencontre dans l'important volume de M. Hensel. Les principes de ce dernier seront peut-être un jour applicables à toutes les catégories de nombres. Ce but cependant ne semble pas encore atteint. Dans certaines pages consacrées à l'examen de développements convergents et qui sont aussi ordonnés suivant les puissances croissantes de  $p$ , on se rend compte des difficultés qu'il y a à faire correspondre à un nombre défini autrement que par une relation algébrique, un Nombre-à-base- $p$  unique et bien déterminé.

M. Hensel, heureusement, poursuit ses profondes recherches. Un second volume, dont on ne peut que se réjouir d'avance, doit paraître bientôt.

Gustave DUMAS (Zurich).

A. HÖFLER. — **Didaktik des mathematischen Unterrichts** (Band I der *Didaktischen Lehrbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen*, herausgegeben von A. HÖFLER u. E. POSKE). — 1 vol. gr. in-8°, 509 p., avec 2 planches et 147 figures ; B. G. Teubner, Leipzig.

Les efforts qui se font depuis quelques années pour perfectionner les méthodes de l'enseignement scientifique devaient nécessairement donner lieu à des monographies spéciales, conformes aux tendances actuelles. C'est cet ensemble d'études didactiques que viennent d'entreprendre MM. HÖFLER et POSKE sous le titre indiqué ci-dessus ; elles embrasseront toutes les branches scientifiques de l'enseignement secondaire supérieur et comprendront dix volumes, en vente séparément.

Le premier volume est consacré aux mathématiques. Entièrement nouveau par la forme et le fond de l'exposé, l'Ouvrage de M. Höfler ne fait pas double emploi avec les exposés systématiques de REIDT et de SIMON. Il se propose d'insister tout particulièrement sur les idées fondamentales qui forment la base de la réforme actuelle de l'enseignement mathématique. Il s'agit souvent de transformations qui ont reçu une solution favorable dans bon nombre d'écoles, sur l'initiative des maîtres, ou qui sont déjà introduites dans certains programmes officiels, mais que l'on voudrait cependant voir adoptées d'une façon générale dans tout l'enseignement secondaire supérieur. Telle est par exemple la question de l'introduction de la notation de fonction et du calcul infinitésimal, dont on parle tant ces dernières années.

M. Höfler a été bien inspiré en ne traitant pas séparément l'Arithmétique et la Géométrie. Il examine le but, les plans d'études et les méthodes, adaptés à l'âge de l'élève, successivement pour chaque degré de l'enseignement.

Nous ne saurions trop recommander aux jeunes maîtres l'étude de cet Ouvrage, sur lequel nous aurons sans doute souvent à revenir dans cette Revue.

H. F.