MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Quelques essais de démonstration du grand théorème de Fermat.

Premier article.

A. LUDWIG und L. WLTAVSKY. — *Rationalität von Potenzsummen; Beweis des Fermatschen Satzes.* — (Sonderabdruck aus den « Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens », Jahrgang 1908, viertes Heft); 10 p.

J. UMFAHRER. — *Beweis der Richtigkeit des grossen Fermatschen Satzes.* — 10 p.; O.-Th. Scholl, München; 1908.

D.-K. POPOFF. — *Démonstration du théorème, dit « la Grande Proposition », de Fermat, à savoir que* $a^n + b^n = c^n$ *est impossible en nombres entiers si* $n > 2$. — 8 p., Sofia. — *Annexe à ma Démonstration...;* 15 p.

Voici comment FERMAT énonce son fameux théorème qui semble, dit E. LUCAS, jeter comme un perpétuel défi à l'intelligence humaine : « Cubum in duos cubos aut quadrato quadratum in quadrato quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere, *cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi.* » Et Fermat ajoute : « Hanc marginis exiguitas non caperet. »

Cette démonstration que Fermat déclare posséder, mais que, faute de place, il n'a pu noter en marge de son exemplaire de Diophante, on la cherche en vain depuis deux siècles et demi. Les tentatives nouvelles provoquées par le *Prix Wolfskehl* seront-elles plus heureuses ? Réussira-t-on enfin à vaincre les difficultés qui ont arrêté EULER, GAUSS, CAUCHY, DIRICHLET, KUMMER ?

On sait que la Société scientifique de Göttingue a déjà reçu plusieurs centaines de publications consacrées au dernier théorème de Fermat. La plupart sont dues à des débutants qui, souvent, ignorent les principes mêmes de la théorie des nombres et ne tiennent naturellement aucun compte des résultats déjà acquis (v. l'*Ens. math.*, t. X, 1908, p. 514). On comprend que leurs « démonstrations » inspirent une certaine défiance.

Quelques-uns de ces essais ont été adressés à la *Rédaction* de l'*Enseignement mathématique*. Bien entendu, la *Rédaction* ne s'engage pas à publier de rapport sur les envois qu'elle continuera à recevoir. Mais il ne sera peut-être pas sans intérêt, ne fût-ce qu'au point de vue psychologique, de donner de temps en temps une idée de la manière dont le grand théorème de Fermat est abordé dans quelques-uns de ces essais.

Dans ce premier article je me bornerai aux essais de A. Ludwig et L. Wltavsky, J. Umfahrer et D.-K. Popoff (ancien ministre).

Je commencerai par rappeler qu'il suffit de démontrer l'impossibilité de

$$x^l + y^l = z^l$$

pour l premier, de plus les nombres x, y, z peuvent être supposés premiers entre eux deux à deux.

Voici maintenant à quoi se réduit le raisonnement des auteurs du *premier essai* : Puisque les nombres x, y sont, par hypothèse, premiers entre eux, l'un d'eux au moins (le nombre y par exemple) est premier à l. Deux cas sont à distinguer : dans le premier x est divisible par l, dans le second les deux nombres x, y sont premiers à l. Bornons-nous au premier cas. On a alors

$$z - y = l^{l-1} a^l, \qquad x = la\alpha,$$
$$z - x = b^l, \qquad y = b\beta,$$

a, b, α, β étant quatre nombres entiers premiers entre eux deux à deux (formules connues dont, entre autres, Legendre et Lamé avaient déjà tiré parti). On en déduit immédiatement

$$(1) \qquad la\alpha - b\beta = l^{l-1} a^l - b^l.$$

Les nombres α, β sont donc liés par une relation du premier degré. D'autre part, en remplaçant dans l'équation de Fermat les nombres $z - x$, x, y par leurs expressions en fonction de a, b, α, β, on trouve une relation de la forme

$$(2) \qquad \mathrm{P}(\alpha) = \beta^l.$$

$\mathrm{P}(\alpha)$ étant un polynôme en α.

M. Ludwig et M. Wltavsky cherchent à montrer que les équations (1) et (2) sont incompatibles. Voici comment ils s'y prennent : la relation (1) étant vérifiée en remplaçant α et β par $\alpha_1 = l^{l-2} a^{l-1} + b$, $\beta_1 = b^{l-1} + la$, ils enconcluent que $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ et ils portent ces valeurs dans la relation (2).

Mais, avons-nous le droit de nous en tenir à la solution particulière α_1, β_1 ? L'équation (1) a, comme on sait, une infinité de solutions entières données par les formules

$$\alpha = l^{l-2} a^{l-1} + tb, \quad \beta = b^{l-1} + tla,$$

où t est un entier quelconque. Rien ne nous dit qu'il est permis de *faire abstraction des solutions pour lesquelles* t *est différent de 1.*

Passons à l'*essai de* M. UMFAHRER. Cet auteur procède d'une manière différente. Il se demande d'abord si les nombres z, y, x peuvent former une suite de trois nombres consécutifs. La réponse est négative. Il se demande ensuite si l'équation de Fermat peut admettre des solutions telles que $z = y + 1$, le nombre x n'étant plus assujetti à la condition $y = x + 1$; après quoi il passe au cas général. Le premier de ces cas se traite très simplement, — la démonstration est immédiate, mais, bien entendu, il n'en est pas de même du second et du troisième cas. Je me bornerai au second.

Guidé par l'analogie, M. Umfahrer pose

$$x = a + \mathrm{B}\,, \qquad y = a + 1 + p\mathrm{B}\,, \qquad z = a + 2 + p\mathrm{B}\,,$$

sans nous renseigner du reste sur les conditions auxquelles doivent satisfaire les nombres auxiliaires a, p et B. L'équation de Fermat s'écrit

$$(a + 2 + p\mathrm{B})^l - (a + 1 + p\mathrm{B})^l = (a + \mathrm{B})^l\,.$$

M. Umfahrer la *prend pour une identité.* En regardant a et p comme des constantes, il fait tendre B vers 0 et il retombe sur l'équation

$$(a + 2)^l - (a + 1)^l = a^l\,.$$

Voilà à quoi se réduit le raisonnement de M. Umfahrer.

Examinons l'*essai de* M. POPOFF. Bornons-nous au cas de $l = 3$.

De même que M. Umfahrer, M. Popoff se demande d'abord si l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3$$

admet des solutions telles que $z = y + 1$. Dans ce cas particulier on a

$$3y^2 + 3y + 1 = x^3\,. \tag{3}$$

Or tout cube x^3 se décompose en deux parties : le produit des trois nombres consécutifs $x - 1$, x, $x + 1$, que M. Popoff appelle producteur de cube, et le nombre x.

D'autre part le premier membre de (3) se décompose aussi en deux parties : le produit $3y(y + 1)$ et le nombre 1.

M. Popoff en tire cette *conclusion manifestement inexacte* qu'on doit avoir

$$3y(y + 1) = \text{producteur de cube.}$$

Nous retrouvons la même erreur dans la discussion du cas général.

En résumé, aucun des essais que nous venons d'examiner n'apporte la solution cherchée; c'était à prévoir. Est-il nécessaire de s'arrêter sur les détails de ces démonstrations? J'en ai souligné les erreurs fondamentales; celles dont je n'ai pas parlé sont moins importantes. Je voudrais pourtant en signaler une qu'un lecteur inattentif pourrait ne pas remarquer.

Admettons pour un moment, avec M. Popoff, qu'on ait réellement $3y(y+1) =$ producteur de cube $=$ produit de trois nombres consécutifs. M. Popoff en conclut que l'un des nombres extrêmes est égal à 3.

En d'autres termes l'équation indéterminée

$$3y(y+1) = (x-1)x(x+1)$$

n'aurait, d'après M. Popoff, que les deux solutions (entières et positives) suivantes

$$x - 1 = 3 \quad (\text{d'où } y = 4) \qquad \text{et} \qquad x + 1 = 3 \quad (\text{d'où } y = 1) .$$

Pour montrer que cette assertion est inexacte je me bornerai à indiquer la solution $x = 21$, $y = 55$. Ici l'erreur est moins apparente.

D. Mirimanoff (Genève).

Notations rationnelles pour le système vectoriel.

A propos du système proposé[1] par MM. Burali-Forti et Marcolongo.

1. — *Lettre de* M. Timerding (Strasbourg).

Vous voulez bien ouvrir dans votre *Revue* une discussion sur le tableau des *notations rationnelles pour le système vectoriel minimum* proposées par MM. Burali-Forti et Marcolongo, et que vous avez reproduit dans votre numéro du 15 janvier 1909. Je réponds volontiers à l'invitation de la *Rédaction* et je vous communique en ce qui suit les remarques que j'ai à faire sur cette importante question de l'uniformisation de la notation vectorielle.

D'une manière générale, je peux donner mon adhésion presque entière au système proposé, qui se rapproche beaucoup du procédé provisoire que j'ai adopté moi-même dans mon article pour l'*Encyklopædie der mathemat. Wissenschaften* (tome IV, art. 2) et dans mon livre *Geometrie der Kræfte*, récemment paru chez B. G. Teubner à Leipzig.

[1] Voir l'*Ens. math.* du 15 janvier 1909, XI[e] année, n° 1, p. 41-45.