

# MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

### Quelques essais de démonstration du grand théorème de Fermat.

#### *Premier article.*

A. LUDWIG und L. WLTAVSKY. — *Rationalität von Potenzsummen; Beweis des Fermatschen Satzes.* — (Sonderabdruck aus den « Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens », Jahrgang 1908, viertes Heft); 10 p.

J. UMFÄHRER. — *Beweis der Richtigkeit des grossen Fermatschen Satzes.* — 10 p.; O.-Th. Scholl, München; 1908.

D.-K. POPOFF. — *Démonstration du théorème, dit « la Grande Proposition », de Fermat, à savoir que  $a^n + b^n = c^n$  est impossible en nombres entiers si  $n > 2$ .* — 8 p., Sofia. — *Annexe à ma Démonstration...*; 15 p.

Voici comment FERMAT énonce son fameux théorème qui semble, dit E. LUCAS, jeter comme un perpétuel défi à l'intelligence humaine : « Cubum in duos cubos aut quadrato quadratum in quadrato quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere, *cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi.* » Et Fermat ajoute : « Hanc marginis exiguitas non caperet. »

Cette démonstration que Fermat déclare posséder, mais que, faute de place, il n'a pu noter en marge de son exemplaire de Diophante, on la cherche en vain depuis deux siècles et demi. Les tentatives nouvelles provoquées par le *Prix Wolfskehl* seront-elles plus heureuses ? Réussira-t-on enfin à vaincre les difficultés qui ont arrêté EULER, GAUSS, CAUCHY, DIRICHLET, KUMMER ?

On sait que la Société scientifique de Göttingue a déjà reçu plusieurs centaines de publications consacrées au dernier théorème de Fermat. La plupart sont dues à des débutants qui, souvent, ignorent les principes mêmes de la théorie des nombres et ne tiennent naturellement aucun compte des résultats déjà acquis (v. l'*Ens. math.*, t. X, 1908, p. 514). On comprend que leurs « démonstrations » inspirent une certaine défiance.

Quelques-uns de ces essais ont été adressés à la *Rédaction de l'Enseignement mathématique*. Bien entendu, la *Rédaction* ne s'engage pas à publier de rapport sur les envois qu'elle continuera à recevoir. Mais il ne sera peut-être pas sans intérêt, ne fût-ce

qu'au point de vue psychologique, de donner de temps en temps une idée de la manière dont le grand théorème de Fermat est abordé dans quelques-uns de ces essais.

Dans ce premier article je me bornerai aux essais de A. LUDWIG et L. WLTAVSKY, J. UMFÄHRER et D.-K. POPOFF (ancien ministre).

Je commencerai par rappeler qu'il suffit de démontrer l'impossibilité de

$$x^l + y^l = z^l$$

pour  $l$  premier, de plus les nombres  $x, y, z$  peuvent être supposés premiers entre eux deux à deux.

Voici maintenant à quoi se réduit le raisonnement des auteurs du *premier essai* : Puisque les nombres  $x, y$  sont, par hypothèse, premiers entre eux, l'un d'eux au moins (le nombre  $y$  par exemple) est premier à  $l$ . Deux cas sont à distinguer : dans le premier  $x$  est divisible par  $l$ , dans le second les deux nombres  $x, y$  sont premiers à  $l$ . Bornons-nous au premier cas. On a alors

$$\begin{aligned} z - y &= l^{l-1} a^l, & x &= la\alpha, \\ z - x &= b^l, & y &= b\beta. \end{aligned}$$

$a, b, \alpha, \beta$  étant quatre nombres entiers premiers entre eux deux à deux (formules connues dont, entre autres, LEGENDRE et LAMÉ avaient déjà tiré parti). On en déduit immédiatement

$$(1) \quad la\alpha - b\beta = l^{l-1} a^l - b^l.$$

Les nombres  $\alpha, \beta$  sont donc liés par une relation du premier degré. D'autre part, en remplaçant dans l'équation de Fermat les nombres  $z - x, x, y$  par leurs expressions en fonction de  $a, b, \alpha, \beta$ , on trouve une relation de la forme

$$(2) \quad P(\alpha) = \beta^l.$$

$P(\alpha)$  étant un polynôme en  $\alpha$ .

M. LUDWIG et M. WLTAVSKY cherchent à montrer que les équations (1) et (2) sont incompatibles. Voici comment ils s'y prennent : la relation (1) étant vérifiée en remplaçant  $\alpha$  et  $\beta$  par  $\alpha_1 = l^{l-2} a^{l-1} + b$ ,  $\beta_1 = b^{l-1} + la$ , ils en concluent que  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\beta = \beta_1$  et ils portent ces valeurs dans la relation (2).

Mais, avons-nous le droit de nous en tenir à la solution particulière  $\alpha_1, \beta_1$  ? L'équation (1) a, comme on sait, une infinité de solutions entières données par les formules

$$\alpha = l^{l-2} a^{l-1} + tb, \quad \beta = b^{l-1} + la.$$

où  $t$  est un entier quelconque. Rien ne nous dit qu'il est permis de faire abstraction des solutions pour lesquelles  $t$  est différent de 1.

Passons à l'essai de M. UMFÄHRER. Cet auteur procède d'une manière différente. Il se demande d'abord si les nombres  $z$ ,  $y$ ,  $x$  peuvent former une suite de trois nombres consécutifs. La réponse est négative. Il se demande ensuite si l'équation de Fermat peut admettre des solutions telles que  $z = y + 1$ , le nombre  $x$  n'étant plus assujéti à la condition  $y = x + 1$ ; après quoi il passe au cas général. Le premier de ces cas se traite très simplement, — la démonstration est immédiate, mais, bien entendu, il n'en est pas de même du second et du troisième cas. Je me bornerai au second.

Guidé par l'analogie, M. Umfahrer pose

$$x = a + B, \quad y = a + 1 + pB, \quad z = a + 2 + pB,$$

sans nous renseigner du reste sur les conditions auxquelles doivent satisfaire les nombres auxiliaires  $a$ ,  $p$  et  $B$ . L'équation de Fermat s'écrit

$$(a + 2 + pB)^l - (a + 1 + pB)^l = (a + B)^l.$$

M. Umfahrer la prend pour une identité. En regardant  $a$  et  $p$  comme des constantes, il fait tendre  $B$  vers 0 et il retombe sur l'équation

$$(a + 2)^l - (a + 1)^l = a^l.$$

Voilà à quoi se réduit le raisonnement de M. Umfahrer.

Examinons l'essai de M. POPOFF. Bornons-nous au cas de  $l = 3$ .

De même que M. Umfahrer, M. Popoff se demande d'abord si l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3$$

admet des solutions telles que  $z = y + 1$ . Dans ce cas particulier on a

$$(3) \quad 3y^2 + 3y + 1 = x^3.$$

Or tout cube  $x^3$  se décompose en deux parties : le produit des trois nombres consécutifs  $x - 1$ ,  $x$ ,  $x + 1$ , que M. Popoff appelle producteur de cube, et le nombre  $x$ .

D'autre part le premier membre de (3) se décompose aussi en deux parties : le produit  $3y(y + 1)$  et le nombre 1.

M. Popoff en tire cette conclusion manifestement inexacte qu'on doit avoir

$$3y(y + 1) = \text{producteur de cube.}$$

Nous retrouvons la même erreur dans la discussion du cas général.

*En résumé*, aucun des essais que nous venons d'examiner n'apporte la solution cherchée; c'était à prévoir. Est-il nécessaire de s'arrêter sur les détails de ces démonstrations? J'en ai souligné les erreurs fondamentales; celles dont je n'ai pas parlé sont moins importantes. Je voudrais pourtant en signaler une qu'un lecteur inattentif pourrait ne pas remarquer.

Admettons pour un moment, avec M. Popoff, qu'on ait réellement  $3y(y + 1) = \text{producteur de cube} = \text{produit de trois nombres consécutifs}$ . M. Popoff en conclut que l'un des nombres extrêmes est égal à 3.

En d'autres termes l'équation indéterminée

$$3y(y + 1) = (x - 1)x(x + 1)$$

n'aurait, d'après M. Popoff, que les deux solutions (entières et positives) suivantes

$$x - 1 = 3 \quad (\text{d'où } y = 4) \quad \text{et} \quad x + 1 = 3 \quad (\text{d'où } y = 1).$$

Pour montrer que cette assertion est inexacte je me bornerai à indiquer la solution  $x = 21$ ,  $y = 55$ . Ici l'erreur est moins apparente.

D. MIRIMANOFF (Genève).

### Notations rationnelles pour le système vectoriel.

A propos du système proposé<sup>1</sup> par MM. BURALI-FORTI  
et MARCOLONGO.

#### 1. -- Lettre de M. TIMERDING (Strasbourg).

Vous voulez bien ouvrir dans votre *Revue* une discussion sur le tableau des *notations rationnelles pour le système vectoriel minimum* proposées par MM. BURALI-FORTI et MARCOLONGO, et que vous avez reproduit dans votre numéro du 15 janvier 1909. Je réponds volontiers à l'invitation de la *Rédaction* et je vous communique en ce qui suit les remarques que j'ai à faire sur cette importante question de l'uniformisation de la notation vectorielle.

D'une manière générale, je peux donner mon adhésion presque entière au système proposé, qui se rapproche beaucoup du procédé provisoire que j'ai adopté moi-même dans mon article pour l'*Encyklopædie der mathemat. Wissenschaften* (tome IV, art. 2) et dans mon livre *Geometrie der Kräfte*, récemment paru chez B. G. Teubner à Leipzig.

<sup>1</sup> Voir l'*Ens. math.* du 15 janvier 1909, XI<sup>e</sup> année, n<sup>o</sup> 1, p. 41-45.

Les notations proposées ont la tendance générale à n'employer que des caractères qui se trouvent dans toutes les imprimeries. D'autre part il est d'un très grand avantage de pouvoir rapprocher aussi typographiquement, autant que possible, les lettres représentant deux vecteurs (ou deux points) liés l'un à l'autre par une des opérations fondamentales. Si au contraire on les sépare par un espace trop grand, les formules perdront beaucoup en clarté et seront beaucoup moins aisées à lire. C'est ce qui m'avait induit à choisir, pour désigner le *produit interne*, un signe  $\times$  égal en forme mais plus petit que celui qui est proposé dans le tableau. Ainsi l'on se garantit l'avantage d'avoir un caractère spécial (qui, le cas échéant, pourrait sans doute être mis facilement sur un autre corps) pour désigner cette opération vectorielle. De même je plaiderais pour la notation  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  du produit vectoriel au lieu de  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , puisque le petit crochet ressemble mieux à un lien qui lie ensemble les deux vecteurs réunis dans l'expression du produit.

La même observation pourrait se faire relativement à la notation  $\mathbf{B} - \mathbf{A}$  que l'on propose pour le vecteur terminé par les deux points A, B : cette notation s'écrit peut-être mieux sous la forme  $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ . Il faut remarquer ici que les opérations directes sur les points sont extrêmement restreintes dans le système minimum, et le vecteur n'y est la différence de deux points que dans un sens très figuratif, les règles pour le calcul des points n'étant pas établies généralement. Dans le système minimum chaque formule qui ne contient que des symboles de points est absolument privée de sens, si elle ne fait pas suivre immédiatement à chaque point un autre lié au précédent par le signe  $-$ . Par exemple, si S désigne le centre de gravité d'un triangle ABC on a

$$\mathbf{A} - \mathbf{S} + \mathbf{B} - \mathbf{S} + \mathbf{C} - \mathbf{S} = 0 ,$$

mais on ne peut pas écrire

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}}{3} .$$

C'est ce qu'on marquerait mieux, me semble-t-il, en écrivant la première formule de la manière suivante

$$\mathbf{A}-\mathbf{S} + \mathbf{B}-\mathbf{S} + \mathbf{C}-\mathbf{S} = 0 ,$$

qui rend visible immédiatement la somme de trois vecteurs en laissant ensemble les caractères qui définissent un seul vecteur.

Ces remarques purement typographiques peuvent paraître un peu hors propos, parce qu'elles n'abordent pas expressément dans les notations proposées; je crois cependant que ces ques-

tions sont d'une très haute importance pour l'orientation facile du lecteur dans un ouvrage d'analyse vectorielle.

Mais si c'est ici un intérêt pratique que je voudrais défendre un peu, je dois, en me plaçant maintenant au point de vue logique, m'opposer formellement à la locution qu'on veut attacher aux différents signes de multiplication. Des lettres qui désignent des entités géométriques ou physiques et qui ont le caractère de substantifs, ne peuvent être liées que par des mots qui s'appliquent à des substantifs, c'est-à-dire par des adverbes ou des prépositions. Ainsi il est tout à fait correct de prononcer  $B - A : B$  moins  $A$ . Mais il est impossible de dire :  $a$  interne  $b$ . Grassmann a trouvé une locution qui me semble absolument satisfaisante :  $a$  en  $b$  ( $a$  in  $b$ ). De même il est contraire à toutes les règles de la langue de dire «  $a$  vecteur  $b$  ». Pour exprimer que  $b$  est joint à  $a$  pour former un nouveau vecteur, je proposerais de dire simplement «  $a$  contre  $b$  ».

Parmi les réfutations des opinions contraires, les observations qui servent à défendre la notation « *mod a* » pour la longueur (grandeur) d'un vecteur  $a$ , ne me semblent pas bien justifiées. La longueur d'un vecteur n'est pas une fonction proprement dite, mais quelque chose qui fait partie de son être, qui ressort si l'on fait abstraction de la direction du vecteur et qui est tout à fait analogue à la valeur absolue d'un nombre. Dans une typographie un peu claire, le danger d'une confusion de la notation  $|a|$  avec des parenthèses me semble illusoire et la notation *mod a* est évidemment plus longue. Il suffit pour le voir de comparer les deux formules

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(a, b),$$

$$[\text{mod}(a + b)]^2 = \text{mod } a^2 + \text{mod } b^2 + 2 \text{ mod } a \text{ mod } b \cos(a, b).$$

Le système minimum croit pouvoir se passer entièrement du bivecteur de GRASSMANN. C'est là un point auquel, peut-être par raison d'une partialité personnelle, je ne peux pas consentir. Je crois que la notion du bivecteur est absolument indispensable et de la même importance que le vecteur lui-même. La refuser revient pour moi à refuser les surfaces et à n'accepter que les lignes. Pour plus de clarté, qu'il me soit permis de citer un exemple : la couche magnétique est une notion fondamentale en physique mathématique; pour éviter l'apparence d'une idée non purement mathématique, nous pouvons parler plutôt d'une surface  $\sigma$  divisées en éléments infiniment petits doués chacun d'un sens défini de rotation. Cette notion est impossible à établir sans se servir des idées de Grassmann ou, si l'on veut, de Mœbius, car en remplaçant les éléments  $d\sigma$  par des normales qui leur sont proportionnelles en longueur et qui marquent, d'après une certaine règle, par le sens de leur direction, le sens de la direction de l'élément de surface, on remplace l'idée originale par une autre

qui ne lui est pas équivalente. En effet, on remplace la surface par un amas de petites lignes, ce qui ne permet plus l'intégration, du moins dans le sens ordinaire; de plus on fait usage d'une convention absolument arbitraire relativement à la correspondance des longueurs avec les aires et du sens de direction avec le sens de rotation. Ce n'est que dans l'idée originale que  $d\sigma$  apparaît comme le véritable élément d'une surface  $\sigma$  fixée non seulement par rapport à son aire, mais aussi par rapport à la forme et la situation réciproque de toutes ses parties, de même que  $ds$  est le vecteur infinitésimal qui fait partie d'une ligne  $s$ .

Le produit scalaire  $\mathbf{u} \times \varphi$  d'un vecteur et d'un bivecteur est représenté par le volume du cylindre qui a  $\varphi$  pour base et  $\mathbf{u}$  pour arête. L'intégrale

$$\int_{(\sigma)} \mathbf{u} \times d\sigma,$$

prise par rapport à une surface  $\sigma$ , donne alors le « flux » à travers cette surface, et cette notion me semble indispensable pour la fondation de la théorie vectorielle.

Les auteurs des notations proposées désirent qu'on fasse une distinction très prononcée entre l'opérateur de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

appliqué à une fonction scalaire et le même opérateur appliqué à une fonction vectorielle, parce que dans ces deux cas il est exprimé d'une manière différente par les opérations *grad*, *div* et *rot* que les auteurs considèrent comme fondamentales.

Mais il faut remarquer que de ces deux expressions l'une devient nécessairement illusoire dans tous les cas, puisque l'opération *grad* ne peut s'appliquer qu'aux scalaires et les opérations *div* et *rot* ne s'appliquent qu'aux vecteurs. Ainsi il serait absolument impossible de trouver une opération quelconque applicable en même temps aux scalaires et aux vecteurs, si l'on demande qu'elle s'exprime de la même manière par les opérations fondamentales. Il y a pourtant un certain intérêt d'économie de conserver de telles opérations auxquelles une grandeur scalaire peut être soumise aussi bien qu'un vecteur. Telle est par exemple la dérivée par rapport à une direction donnée; on peut prendre cette dérivée aussi bien d'une grandeur scalaire  $u$  que d'un vecteur  $\mathbf{u}$ . Elle s'écrit, dans les deux cas, si  $n$  désigne la direction donnée, disons la normale d'une surface proposée, de la manière suivante

$$\frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}.$$



Quant à l'opération  $\Delta$ , il faut aussi considérer que chaque fonction vectorielle  $\mathbf{u}$  du lieu dans l'espace peut être mise sous la forme

$$\mathbf{u} = u \cdot \mathbf{a} + v \cdot \mathbf{b} + w \cdot \mathbf{c},$$

en désignant par  $u, v, w$  des fonctions scalaires et par  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  des vecteurs constants linéairement indépendants (non parallèles tous les trois au même plan). Alors on obtient pour l'opération  $\Delta$  appliquée à une fonction vectorielle directement la définition suivante :

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta u \cdot \mathbf{a} + \Delta v \cdot \mathbf{b} + \Delta w \cdot \mathbf{c},$$

qui la réduit à l'opération  $\Delta$  pour des fonctions scalaires.

De plus, on doit se demander, comment il faut définir les opérateurs, quand on ne veut pas se servir des méthodes cartésiennes, comme est, à ce qu'il paraît, dans les idées des auteurs. On sait qu'on ne peut arriver de cette manière aux opérateurs *div* et *rot* qu'en tenant compte des formules bien connues de Gauss et de Stokes :

$$\int_{(\tau)} \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\tau = \int_{(\sigma)} \mathbf{u} \times d\sigma,$$

où  $\sigma$  désigne une surface close et  $\tau$  la partie de l'espace qu'elle contient, et

$$\int_{(\omega)} \operatorname{rot} \mathbf{u} \times d\omega = \int_{(s)} \mathbf{u} \times d\mathbf{s},$$

où  $\omega$  est une surface terminée par la ligne  $\mathbf{s}$ . De la première formule on obtient, si l'on pose

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} u,$$

la suivante :

$$(a) \quad \int_{(\tau)} \Delta u \, d\tau = \int_{(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot d\sigma,$$

qui sert à définir  $\Delta u$  pour les scalaires. Mais en employant la formule donnée plus haut

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta u \cdot \mathbf{a} + \Delta v \cdot \mathbf{b} + \Delta w \cdot \mathbf{c},$$

on trouve immédiatement

$$(b) \quad \int_{(\tau)} \Delta \mathbf{u} \, d\tau = \int_{(\sigma)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \, d\sigma,$$

où  $d\sigma$  est pris dans le sens d'un simple nombre, de sorte que l'opérateur  $\Delta$  est défini pour les scalaires et pour les vecteurs par

les deux formules (a) et (b), dont la forme est absolument la même. Ainsi il est difficile de voir pourquoi on devrait les désigner différemment.

Mais c'est là tout ce que j'ai à dire contre le système proposé, qui, s'il est adopté généralement, constituera sans doute un grand progrès. Le désaccord actuel dans la terminologie vectorielle est presque sans exemple et ses conséquences sont très graves pour le développement de cette science, parce qu'il rend extrêmement difficile l'étude de toutes les recherches dans l'analyse vectorielle et dans ses nombreuses applications.

Strasbourg, le 22 février 1909.

2. — Réponse de MM. BURALI-FORTI et MARCOLONGO  
à la lettre de M. G. COMBEBIAC.

Le calcul vectoriel est d'une importance fondamentale pour la mécanique et la physique, de même que le calcul algébrique est fondamental pour l'analyse. S'il est donc sans importance de fixer une notation vectorielle, comme M. Combebiac semble croire (v. *L'Ens. mathém.* du 15 janv. 1909, p. 46), il est aussi sans importance d'avoir un seul algorithme en algèbre.

La question de l'unification des notations vectorielles n'a rien de particulier en elle-même. L'importance lui vient par la variété et par le défaut de correction logique et formelle de quelques-unes des notations usuelles. Ces notations sont parfois contraires aux lois algébriques les plus élémentaires et à la nature des entités auxquelles elles s'appliquent; ou bien elles sont improprement déduites des notations, très précises, de Hamilton. Une analyse superficielle montre clairement que ce n'est pas une question de forme; c'est une question tout à fait essentielle.

M. Combebiac a pleine liberté de donner sa préférence aux notations des quaternions et de rejeter celles des homographies; mais nous le prions de vouloir bien réfléchir que les *quaternions*, *entités à quatre dimensions*, ne sont pas des *homographies*<sup>1</sup>; et que, en mécanique et en physique, on doit considérer des *homographies* à 6, 9... dimensions, qui seulement par un calcul indirect et compliqué peuvent être substituées par les quaternions.

<sup>1</sup> BURALI-FORTI : Ignaternioni di Hamilton ed il calcolo vettoriale [*Atti Accademia Torino*, 1908].