

LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE BASÉE SUR LE GROUPE DES DÉPLACEMENTS

Autor(en): **Rousseau, Th.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-11850>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

La théorie des parallèles.

La théorie des parallèles peut ensuite être faite comme l'a si clairement exposé M. Carlo BOURLET dans son *Cours abrégé de Géométrie*. La seule démonstration un peu pénible de cette théorie (si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre), peut être simplifiée en introduisant la notion de *bande de plan*.

Immédiatement après, se place le théorème des projections, la définition du sinus et du cosinus. Cette théorie, complétée par la notion de *produit géométrique*, permet de traiter toutes les questions de relations métriques sans parler de triangles semblables.

Enfin, la dernière partie de la Géométrie élémentaire comprendrait l'étude des transformations : homothétie, similitude (triangles semblables), inversion, transformation par pôles et polaires réciproques.

* * *

J'ai voulu montrer dans cette note, que si on prend pour base de la Géométrie élémentaire l'existence du groupe des déplacements, on a besoin de moins de postulats que dans l'exposition classique due à Euclide ; que ces postulats peuvent être plus nettement posés ; que lorsqu'on les a admis, on n'a plus besoin de recourir à l'expérience et que, par suite, cette exposition, au point de vue purement logique, vaut au moins autant que celle d'Euclide. Si, d'autre part, cette façon de présenter les choses permet aux élèves de suivre de plus près les réalités ; si elle les initie, par l'introduction de la notion de groupe de transformations, aux méthodes les plus fécondes de la Géométrie moderne, de sorte, comme l'a dit M. Bourlet¹, qu'elle descend plus bas et monte plus haut que celle qui a cours, il semble qu'on doive faire des efforts pour la faire pénétrer dans l'enseignement.

Je serais heureux si la présente note pouvait aider les professeurs dans les tentatives qu'ils feront dans cette voie.

Th. ROUSSEAU (Lycée de Dijon).

¹ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, novembre 1905.

LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE BASÉE SUR LE GROUPE DES DÉPLACEMENTS

I. — LES ROTATIONS

Droite.

1. — Je suppose que le lecteur sait ce que c'est qu'un *ensemble continu* à 1, 2, 3... dimensions¹.

Je rappelle qu'il est facile de construire des ensembles continus à 3 dimensions. Il suffit, par exemple, de prendre pour *éléments* les systèmes de 3 nombres x, y, z , que l'on peut former en donnant à x, y, z , toutes les valeurs possibles, deux éléments (x, y, z) et (x', y', z') étant égaux, par définition, si $x = x', y = y', z = z'$.

Je suppose également que le lecteur sait ce que c'est qu'une *transformation*, et aussi, ce que c'est qu'une *transformation continue* d'un ensemble continu à une ou plusieurs dimensions.

Je considère aussi comme connue la notion de *groupe* de transformations.

Cela posé, j'appelle *espace lobatschefskien* tout ensemble qui satisfait aux postulats suivants :

2. — *Postulat I.* Il est continu et à trois dimensions. J'appellerai *points* les éléments de cet ensemble. J'appellerai *ligne* un ensemble continu à une dimension, formé de points, et *surface* un ensemble continu à deux dimensions, formé de points.

3. — *Postulat II.* Parmi les transformations continues que peut subir l'espace, il y en a qui satisfont aux postulats suivants, numérotés de III à XI inclus ; je les appelle des *déplacements lobatschefskiens*.

4. — *Postulat III.* Il y a une infinité de déplacements lobatschefskiens. Ces déplacements forment un ensemble continu. Ils forment aussi un groupe, et par suite un groupe continu.

Définition. On dit que deux figures F et F' sont égales si on peut trouver un déplacement² D qui les amènent à coïncider, c'est-à-dire tel que

$$F' = F . D .$$

5. — **THÉORÈME.** *Deux figures égales à une même troisième sont égales entre elles.* Car les déplacements forment un groupe.

¹ On pourra consulter à ce sujet : Edward V. HUNTINGTON. *La Kontinuo*, traduction en espéranto de Raoul BRICARD (Gauthier-Villars).

² Je sous-entendrai désormais le mot *lobatschefskien*.

6. — *Postulat IV.* Etant donnés deux couples de points AB , $A'B'$, on ne peut pas, en général, trouver un déplacement qui amène A sur A' et B sur B' . Si on en peut trouver un, la figure réduite formée par les deux points A et B est égale à la figure réduite formée par les deux autres points A' et B' , : je dirai alors que la *distance* des deux points A et B est égale à la distance des deux points A' et B' . J'admets que, dans ce cas, on peut trouver un autre déplacement qui amène A sur B' et B sur A' .

En particulier étant donné deux points A et B , on peut trouver un déplacement qui amène A en B et B en A .

7. — *Postulat V.* Il y a une infinité de déplacements lobatschefskiens dans lesquels un point donné M reste à lui-même son homologue.

8. — *Postulat VII.* Il y a une infinité de déplacements lobatschefskiens dans lesquels deux points donnés A et B restent à eux-mêmes leurs homologues. Ces déplacements forment un ensemble continu, à une dimension, et fermé¹.

De plus, dans chacun de ces déplacements il y a une infinité de points qui sont à eux-mêmes leurs homologues. Ces points forment un ensemble continu, à une dimension, illimité dans les deux sens, c'est-à-dire une ligne, que j'appelle *ligne droite* ou simplement *droite*.

Enfin, j'admets encore que la ligne des points qui restent fixes² est la même pour tous les déplacements qui laissent A et B fixes.

Tous ces déplacements qui laissent A et B fixes s'appellent des *rotations* autour de la droite D dont les points restent fixes, et qui s'appelle la *charnière*.

9. — THÉORÈME. *Par deux points donnés, il passe toujours une droite et une seule.*

Il résulte du postulat précédent qu'il en passe une. Je dis que toute droite D' définie par deux points A' et B' et qui passerait par A et B serait confondue avec D .

Soit en effet D un déplacement qui laisse fixe $A'B'$. Il laisse fixes aussi A et B puisque, par hypothèse, A et B sont sur la droite D' . Par suite, laissant fixes A et B , il laisse fixes tous les points de D . Dès lors tout point M de D est sur D' , puisqu'il reste fixe dans le déplacement D . De même tout point M' de D' restant fixe dans le déplacement D , qui laisse A et B fixes, est sur D et les deux droites sont confondues.

10. — THÉORÈME. *Toute rotation autour de D qui laisse fixe un point en dehors de D , est la rotation identique.* Car dans une rotation autre que la rotation identique, il n'y a que les points de D qui ne bougent pas.

¹ C'est-à-dire que les déplacements sont rangés de telle façon, que l'un quelconque d'entre eux se reproduit périodiquement dans la suite de ces déplacements.

² C'est-à-dire sont à eux-mêmes leurs homologues.

11. — *Corollaire I.* Tout déplacement qui laisse fixes trois points non en ligne droite est le déplacement identique.

Car deux des points A, B, C restant fixes, par exemple, A et B, le déplacement est une rotation autour de AB; le point C restant fixe et n'étant pas sur AB, la rotation est la rotation identique.

12. — *Corollaire II.* Si A', B', C' sont les homologues de A, B, C dans un déplacement D, il n'y a pas d'autre déplacement qui amène A en A', B en B' et C en C'.

Car s'il y en avait un autre D', le déplacement $D'D^{-1}$ laisserait fixes les 3 points ABC non en ligne droite et on aurait $D'D^{-1} = 1$, d'où

$$D' = D.$$

13. — *Définitions.* Une droite étant un ensemble continu à une dimension, formé de points, elle peut être parcourue dans deux sens différents. Une droite sur laquelle on a choisi un sens s'appelle un *axe*.

Un point O d'une droite la partage en deux *semi-droites d'origine* O. Deux points A et B d'une droite déterminent une *portion de droite d'extrémités* A et B et formée de tous les points de la droite situés entre A et B.

14. — *Postulat VII.* Etant donnée une semi-droite OX d'origine O, on peut trouver un déplacement qui laisse le point O fixe, et qui amène la semi-droite OX à passer par un point quelconque M, choisi arbitrairement.

15. — *Corollaires.* I. Deux semi-droites sont égales.

16. — II. Deux droites sont égales.

17. — III. On peut retourner une droite sur elle-même, par un déplacement qui laisse fixe un point de la droite.

18. — IV. On peut trouver un déplacement qui amène une droite sur sa position primitive, sans que le sens des points soit changé, et de manière qu'un point A donné d'avance vienne sur un point A' donné d'avance sur la droite.

Il suffit de retourner le couple de points AA' sur lui-même, puis de retourner la droite sur elle-même en laissant A' fixe. Un tel déplacement s'appelle un *glissement* de la droite sur elle-même.

19. — *Définitions.* I. On dit que deux portions de droite AB et A'B' ont même *longueur*, quand elles sont égales.

II. Je définis ensuite comme d'ordinaire l'*inégalité* et la *somme* de deux longueurs.

20. *THÉORÈME.* La somme de deux longueurs est commutative.

Si AB et CD ont les extrémités B et C confondues, AD a pour longueur la somme des longueurs de AB et CD. En retournant d'abord AD sur lui-même puis AB et CD, la proposition se démontre aisément.

On en déduit que la somme de plusieurs longueurs est commutative et associative.

21. — *Postulat VIII.* Etant donnée une longueur AB quelconque et une longueur CD non nulle, on peut toujours trouver un entier n assez grand pour que $AB > n \cdot CD$.

22. — *Postulat IX.* Etant donnée une longueur AB, on peut toujours trouver une longueur CD telle que

$$AB = 2 \cdot CD.$$

Les longueurs sont donc des grandeurs directement mesurables¹.

23. — **THÉORÈME.** *Quand on retourne une portion de droite sur elle-même, il y a un point qui ne bouge pas. Ce point s'appelle le milieu de la portion de droite.*

Segments. Ici se place la théorie classique des segments.

Angles.

24. — *Définition.* J'appelle *angle* la figure formée par deux semi-droites ayant la même origine.

25. — *Postulat X.* Etant donnés deux angles xoy , $x'o'y'$, on ne peut pas, en général, trouver un déplacement qui amène ox sur $o'x'$ et oy sur $o'y'$. Si on peut en trouver un, on peut en trouver un autre qui amène ox sur $o'y'$ et oy sur $o'x'$.

En particulier on peut retourner un angle sur lui-même.

26. — **THÉORÈME.** *Le déplacement qui retourne un angle sur lui-même est une rotation.*

Car, si nous portons sur les côtés deux longueurs égales $OA = OB$, le déplacement qui retourne l'angle sur lui-même retourne la portion de droite AB sur elle-même. Son milieu I ne bouge donc pas, et le déplacement est une rotation autour de OI.

La droite OI s'appelle la *bissectrice* de l'angle xoy .

Remarque I. Le carré de la rotation R qui retourne un angle sur lui-même est la rotation identique. Cette rotation R s'appelle une *transposition*.

27. — *Postulat XI.* Nous admettrons qu'il n'y a qu'une rotation autour d'une droite donnée dont le carré est la rotation identique, autrement dit qu'il n'existe qu'une transposition autour d'une droite donnée.

28. — **THÉORÈME.** *Deux angles opposés par le sommet xoy , $x'o'y'$ sont égaux.*

Car il suffit de retourner l'angle xoy' sur lui-même pour les faire coïncider.

¹ Voir : TANNERY, *Leçons d'Arithmétique*, chap. X et XIII.

29. — *Définition.* On dit qu'une semi-droite oy est *perpendiculaire* sur une droite $x'x$ en un point o , si elle fait avec ox et ox' deux angles égaux. Ces deux angles égaux sont dits *droits*.

30. — THÉORÈME. *Si une semi-droite oy est perpendiculaire sur une droite $x'x$, la semi-droite $o'y$ opposée à oy est aussi perpendiculaire sur $x'x$. De même ox et ox' sont perpendiculaires sur yy' . On dit que les deux droites $x'x$, $y'y$ sont perpendiculaires.*

31. — THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux droites xx' et yy' soient perpendiculaires est qu'une transposition autour d'une des deux droites retourne l'autre sur elle-même.*

La condition est évidemment suffisante. Elle est nécessaire, car si les angles $yo x$, $yo x'$ sont égaux, la rotation autour de oy qui amène ox sur ox' , amène ox' sur ox et est une transposition.

32. — THÉORÈME. *Les bissectrices de deux angles opposés par le sommet sont confondues. Les deux bissectrices des quatre angles formés par deux droites concourantes sont rectangulaires.*

La première partie est évidente, car si on retourne un angle xoy sur lui-même, on retourne aussi l'angle $x'oy'$ opposé par le sommet. De plus, par une transposition autour de la bissectrice commune des deux angles xoy et $x'oy'$, les deux angles xoy' et $x'oy$ viennent l'un sur l'autre. Leur bissectrice s'est donc retournée sur elle-même : elle est donc perpendiculaire à la première.

33. — THÉORÈME. *D'un point M pris hors d'une droite D on peut abaisser sur cette droite une perpendiculaire et une seule.*

Car elle doit passer par le transposé M' de M par rapport à D .

Remarque. Par un point o d'une droite zz' on peut mener une infinité de perpendiculaires à cette droite. Il suffit de porter le côté oy d'un angle droit xoy sur oz . Toutes ces perpendiculaires peuvent être considérées comme des bissectrices de l'angle particulier zoz' .

34. — THÉORÈME. *Si une droite est perpendiculaire à deux droites concourantes, à leur point de rencontre, elle est aussi perpendiculaire sur les bissectrices des angles formés par ces deux droites.*

Supposons en effet que zz' soit perpendiculaire sur $x'x$ et $y'y$ en leur point commun O . Portons sur Ox , On' , Oy , Oy' , respectivement, quatre longueurs égales $OA = OA' = OB = OB'$. Soient I , I' , H , H' , les milieux de AB' , $A'B'$, AB , $A'B$. Les droites II' , HH' sont les bissectrices des angles xOy , $x'Oy'$; $x'Oy$, xOy' .

Effectuons une transposition autour de zz' ; on voit facilement que les droites II' et HH' se retournent sur elles-mêmes. Donc elles sont perpendiculaires à zz' .

35. — THÉORÈME. *Tous les angles droits sont égaux.*

Soit xoz un angle droit. Amenons un des côtés d'un autre angle droit à coïncider avec le prolongement oz' de oz . Soit ox' la position que vient occuper le deuxième côté. Puisque ox et ox' sont perpendiculaires sur zz' , il en est de même de la bissectrice ou

de l'angle xox' . Par suite une transposition autour de ou amène xoz sur $x'oz'$.

36. — THÉORÈME. Si deux droites ox, ox' sont perpendiculaires à une droite zz' au point o , et si oy est bissectrice de l'angle xox' , le produit des deux transpositions autour de oy et ox' est égal à la rotation autour de zz' qui amène ox sur ox' . — Car l'angle xoz vient sur $x'oz$ dans les deux cas.

37. — THÉORÈME. Si deux droites ox, ox' sont perpendiculaires à une droite zz' au point o et si oy est bissectrice de l'angle xox' , la rotation autour de zz' qui amène ox sur ox' est le carré de celle qui amène ox sur oy .

Si ou est la bissectrice de l'angle xoy , la rotation qui amène ox sur oy est égale au produit des deux transpositions autour de ou et oy . Or ce produit amène aussi oy sur ox' .

38. — Corollaires. I. On peut toujours remplacer une rotation autour de zz' par le produit de deux transpositions autour d'axes ox, oy perpendiculaires à zz' en o .

39. — II. Etant donnée une rotation autour de zz' , on peut toujours trouver une rotation R dont le carré soit égal à la rotation donnée.

40. — III. La transformée d'une rotation par une transposition autour d'une perpendiculaire à la charnière est la rotation inverse.

Soit ox une perpendiculaire autour de la charnière zz' . La rotation donnée R amène zox en zox' . Une transposition autour de ox amène zox en $z'ox'$ et zox' en $z'ox'_1$. Or la rotation qui amène $z'ox$ sur $z'ox'_1$, et par suite zox sur zox'_1 , est la même que celle qui amène zox' sur zox , c'est-à-dire R^{-1} .

41. — IV. Le produit de deux rotations autour de la même charnière zz' est commutatif.

Soit R la rotation qui amène zox sur zox' , R_1 la rotation qui amène zox' sur zox'' . Effectuons une transposition autour de la bissectrice oy de xox'' : zox' vient $z'ox'_1$.

La rotation qui amène $z'ox''$ sur $z'ox'_1$ est la transformée de celle qui amène zox sur zox' : c'est donc R^{-1} . De même la rotation qui amène zox'_1 sur zox est la rotation R_1^{-1} . Or zox'' provient de zox par le produit de la rotation qui amène zox sur zox'_1 par celle qui amène zox'_1 sur zox'' . Donc $RR_1 = R_1R$.

42. — THÉORÈME. Etant donnée une rotation R , il n'y a que deux rotations r telles que $r^2 = R$; l'une d'elles est le produit de l'autre par une transposition.

En effet, soit r et r' deux rotations telles que

$$r^2 = r'^2 = R.$$

Ces rotations ont lieu évidemment autour de la même charnière

que la rotation R. Or il y a une rotation ρ telle que $r' = \rho r$. Donc :

$$\begin{cases} r'^2 = \rho r \cdot \rho r = \rho \rho \cdot rr = \rho^2 r^2 = r^2 \\ \text{d'où} \quad \rho^2 = (r^2) (r^2)^{-1} = 1 \end{cases}$$

Donc ρ est une transposition,

43. — *Corollaire.* Il existe deux rotations dont le carré est égal à une transposition autour d'une droite.

Je les appelle des rotations d'un *quartier*.

44. — THÉORÈME. *Etant données deux droites concourantes rectangulaires, on peut leur mener par leur point de rencontre une perpendiculaire commune et une seule.*

Si xx' , yy' sont ces deux droites, on obtient une perpendiculaire zz' satisfaisant à la question en donnant quartier à xx' autour de yy' . Réciproquement si la droite $z_1 z'_1$ satisfait à la question, elle provient de xx' par une rotation d'un quartier. C'est donc zz' ou cette droite retournée sur elle-même.

45. — THÉORÈME. *Etant données deux droites concourantes, on peut leur mener, par leur point de rencontre, une perpendiculaire commune et une seule.*

Soient xx' et yy' les deux droites concourantes en o ; uu' , vv' , leurs bissectrices, qui sont, comme on sait, rectangulaires. Soit zz' la perpendiculaire à uu' et vv' menée par o . Je dis qu'elle est perpendiculaire à xx' . Il suffit de prouver que l'angle xoz est égal à l'angle $x'oz$. Or on les fait manifestement coïncider par une transposition autour de uu' suivie d'une transposition autour de vv' . De même zz' est perpendiculaire à yy' .

Enfin, toute perpendiculaire $z_1 z'_1$ à xx' et yy' , devant être perpendiculaire sur les bissectrices uu' et vv' , se confond avec zz' .

46. — *Composition des rotations dont les charnières sont concourantes.*

Ici se place la théorie classique de la composition des rotations autour de charnières concourantes, basée sur les théorèmes des nos 36 et 38.

On conclut de cette théorie :

47. — *Corollaire I.* Les rotations autour de charnières concourantes en un point o forment un groupe. On les appelle les rotations autour du point o .

Remarque. Le sous-groupe g des rotations autour d'un point o n'est pas *invariant*, car un déplacement qui transforme o en o' transforme le sous-groupe g dans un autre sous-groupe g' , celui des rotations autour de o' .

48. — *Corollaire II.* Tout déplacement est le produit de deux rotations.

Soit en effet un déplacement D qui amène trois points A, B, C, non en ligne droite en A', B', C'. On peut amener A sur A' par

une transposition T autour d'une charnière $\mathcal{A}$, perpendiculaire sur AA' en son milieu. B et C sont venus en B_1 et C_1 . On peut maintenant amener B_1 en B' par une rotation autour de la perpendiculaire $\mathcal{A}'$ à $A'B'$ et $A'B_1$, au point A' . C_1 vient alors en C_2 . Enfin, une rotation autour de $A'B'$ amène C_2 en C_1 . Comme les deux charnières $\mathcal{A}'$ et $A'B'$ sont concourantes, on peut remplacer le produit des deux dernières rotations par une seule, R_1 , autour d'une charnière $\mathcal{A}_1$ passant par A' , et on a $D = TR_1$.

49. — APPLICATIONS. *Définition.* J'appelle *triangle* la figure formée par trois portions de droite ayant deux à deux une extrémité commune.

Hauteurs, médianes, bissectrices. Triangle isocèle.

THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit isocèle, est que la médiane et la hauteur issues d'un sommet soient confondues.*

Démonstration par une transposition.

Plan.

50. — *Définitions préliminaires.* Je dis que l'espace est en mouvement s'il est soumis à un ensemble continu de transformations, comprenant la transformation identique.

Le mouvement est dit à un, deux, ... n paramètres, suivant que cet ensemble est à une, deux, ... n dimensions.

Si le mouvement est à un paramètre, ce paramètre t s'appelle le *temps mathématique*.

Si les transformations de l'ensemble sont des déplacements, on dit que toute figure qui participe au mouvement est de *forme invariable*.

Je dirai qu'un mouvement à un paramètre est *limité*, quand l'ensemble des transformations qui le définit est limité. Il y a alors deux positions extrêmes F_0 et F_1 pour toute figure qui participe au mouvement.

La position F_0 qui correspond à la première valeur du paramètre t s'appelle *position initiale* et l'autre F_1 la *position finale*.

Remarquons que tout mouvement limité à un paramètre définit une transformation, savoir celle qui fait correspondre à la configuration initiale E_0 de l'espace la configuration finale E_1 .

On dit que deux mouvements limités sont *équivalents* quand ils définissent la même transformation.

J'appelle *mouvement de rotation* le mouvement défini par un ensemble continu de rotations.

51. — *Définition.* J'appelle *plan* la figure engendrée par une semi-droite ox , perpendiculaire à une droite zz' , dans un mouvement de rotation autour de zz' . Le plan est une surface, car c'est

un ensemble ponctuel à deux dimensions. Le plan et la droite zz' sont dits *perpendiculaires*.

Remarque. Le plan est complètement défini par la droite zz' et le point o .

52. — THÉORÈME I. *Deux plans quelconques sont égaux.*

Soient deux plans P et P_1 définis par la droite zz' et le point o , la droite $z_1z'_1$ et le point o_1 . Il suffit de faire coïncider zz', o et $z_1z'_1, o_1$, pour que les deux plans coïncident.

53. — THÉORÈME II. *Toute transposition autour d'une droite passant par le pied de la perpendiculaire à un plan, et située dans ce plan, retourne le plan sur lui-même.*

54. — THÉORÈME III. *Dans un mouvement de rotation autour de la perpendiculaire à un plan, le plan coïncide avec sa position primitive.* — On dit qu'il glisse sur lui-même.

55. — THÉORÈME. *Par deux droites concourantes on peut toujours faire passer un plan.*

Car on peut leur mener une perpendiculaire commune.

56. — THÉORÈME. *Le lieu des points équidistants de deux points donnés est le plan perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les deux points.*

57. — THÉORÈME. *Toute droite qui a deux points dans un plan γ est toute entière contenue.*

Soit le plan P perpendiculaire en O à zz' .

1° Soient d'abord deux points A et B équidistants de O dans le plan P . Si I est le milieu de AB , la droite OI est bissectrice de l'angle AOB et nous savons qu'elle est perpendiculaire à zz' . Donc I est dans le plan P .

Prenons deux points HH' sur zz' tels que $OH = OH'$. On a évidemment $AH = AH'$, $BH = BH'$ et aussi $AH = BH$, car on peut amener AH sur BH par une rotation. Donc dans les triangles isocèles ABH , ABH' , les médianes HI , $H'I$ sont perpendiculaires sur AB . De plus elles sont égales puisque I est dans le plan P . Donc, par une rotation autour de AB on peut amener H sur H' . Mais dans cette rotation un point M quelconque de AB ne bouge pas, ce qui prouve que $MH = MH'$ et par suite que le point M est dans le plan P .

2° Soient maintenant deux points quelconques A et B du plan P , I le pied de la perpendiculaire abaissé de O sur AB , B' le point de AB tel que $IB' = IA$ et joignons OB' . Soit $z_1z'_1$ la perpendiculaire commune à OA et OB' et P_1 le plan perpendiculaire à $z_1z'_1$ au point O . Ce plan contient la droite AB' , car les points A et B' sont équidistants de O . Donc il contient aussi le point B et la droite OB . Par suite la droite $z_1z'_1$ perpendiculaire à OA et OB se confond avec zz' , et le plan P_1 , qui contient AB , avec le plan P .

58. — THÉORÈME. *Toute droite d'un plan, qui passe par le pied de la perpendiculaire au plan, partage le plan en deux régions.*

Soit P le plan perpendiculaire en O à zz' , xx' la droite considérée. Considérons l'ensemble P_1 formé des points engendrés par la semi-droite Ox dans le mouvement de rotation qui amène Ox sur Ox' , pour la première fois ; puis l'ensemble P_2 formé des points engendrés par Ox' dans le même mouvement. Je dis que ces deux ensembles sont des *régions*, c'est-à-dire que si M et M' sont deux points du même ensemble, on peut passer de M à M' par un chemin continu sans sortir de cet ensemble. Il suffit d'amener OM sur OM' , ce qui amène M en M_1 sur OM' , puis de suivre le chemin M_1M' sur OM' . De plus, ces régions sont séparées par la droite $x'x$. En effet, si M est dans le premier et M' dans le second ensemble et si un mobile N va de M à M' sur une ligne continue C , la semi-droite ON se déplace d'une manière continue et par suite traverse xx' ; donc N traverse aussi xx' .

59. — THÉORÈME. *Deux plans qui ont en commun deux droites concourantes, dont l'une partage les deux plans en deux régions, coïncident.*

Soient PP' deux plans contenant les deux droites D et Δ , concourantes en o . Supposons que D partage P et P' en deux régions P_1, P_2 et P'_1, P'_2 . Alors Δ est partagée par le point o en deux semi-droites Δ_1, Δ_2 dont l'une est dans P_1 et P'_1 , et l'autre dans P_2 et P'_2 .

Je dis que tout point M d'un des plans est dans l'autre. Supposons que M soit dans P et par exemple dans la région P_2 . Soit M' un point quelconque de Δ_1 , la droite MM' coupe D . Donc elle est toute entière dans P' , et le point M est dans P' .

60. — THÉORÈME. *Par chaque point d'un plan on peut mener à ce plan une perpendiculaire et une seule.*

Soit P le plan perpendiculaire en o à la droite zz' , o_1 un point quelconque de ce plan. Menons par o_1 une droite quelconque Δ dans le plan P . Soit o_1z_1 la perpendiculaire à D et à oo_1 , P_1 le plan perpendiculaire à o_1z_1 au point o_1 . Les plans P et P_1 passent tous deux par oo_1 et D . Or D partage P et P_1 en deux régions puisqu'elle passe par o et par o_1 . Donc les deux plans sont confondus, et o_1z_1 est perpendiculaire en o_1 au plan P .

Toute autre perpendiculaire o_1z_1 au plan P au point o_1 coïncide avec o_1z_1 , car elle doit être perpendiculaire à oo_1 et à D .

Remarque. Un plan P peut être considéré comme engendré par une perpendiculaire ox à une droite zz' , perpendiculaire en un point quelconque o du plan P .

61. — *Corollaire I.* Toute droite d'un plan partage ce plan en deux régions. Chacune d'elles s'appelle un *semi-plan*. La droite s'appelle le *bord* ou l'*arête* du semi-plan.

62. — *Corollaire II.* On peut toujours faire coïncider deux plans PP' de façon à amener un point o de P sur un point o' quelconque de P' , et une droite D passant par o dans P sur une droite D' quelconque passant par o' dans P' .

63. — *Corollaire III.* Une transposition autour d'une droite quelconque d'un plan retourne le plan sur lui-même.

64. — *THÉORÈME.* Par deux droites concourantes on peut faire passer un plan et un seul.

Nous avons déjà vu qu'on en peut faire passer un. Tout plan passant par les deux droites données D et D' est perpendiculaire à la droite oz , perpendiculaire commune à D et D' . Il n'y en a donc qu'un seul.

65. — *Corollaire I.* Par une droite et un point on peut faire passer un plan et un seul.

66. — *Corollaire II.* Par trois points on peut faire passer un plan et un seul.

67. — *THÉORÈME.* Deux plans qui ont un point commun se coupent suivant une droite.

Soit P et P' deux plans ayant en commun le point o , oz et oz' les perpendiculaires à P et P' en o . La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M soit sur l'intersection est que la droite OM soit perpendiculaire à oz et oz' .

68. — *THÉORÈME.* Tout plan partage l'espace en deux régions.

Soit P le plan perpendiculaire en o à une droite zz' , ox une semi-droite quelconque de P , Q le semi-plan zz' , ox ; il est partagé par ox en deux quarts de plan Q_1 et Q_2 .

Tout l'espace peut être considéré comme engendré par Q dans un mouvement de rotation autour de zz' . En effet, un point M quelconque de l'espace détermine avec zz' un semi-plan Q' qui coupe P suivant une semi-droite ox' . Q' est donc une des positions de Q .

Dès lors les points de l'espace se partagent en deux ensembles E_1 et E_2 , suivant qu'ils sont rencontrés par Q_1 ou par Q_2 . En raisonnant comme pour le théorème du n° 58, on voit facilement que E_1 et E_2 sont continus, et par suite constituent deux régions de l'espace, que ces régions sont distinctes et séparées par le plan P .

69. — *THÉORÈME.* Etant donnés un plan P , une droite D dans ce plan et deux points o et o' sur cette droite, il existe un déplacement qui ramène le plan P sur sa position primitive, sans le retourner, de façon que la droite D ait glissé sur elle-même et que le point o soit venu en o' .

Il suffit de faire une transposition autour de la perpendiculaire D à oo' en son milieu, et située dans le plan P , suivie d'une autre transposition autour de la perpendiculaire D' au point o' à la même droite oo' et située également dans le plan P .

Définition. J'appelle un tel déplacement, un *glissement plan rectiligne*. Si on fait varier oo' à partir de o , on obtient un mouvement que j'appelle un *mouvement de glissement plan rectiligne*; $oo' = a$ s'appelle l'*amplitude* du mouvement limité qui amène o en o' .

Angles plans.

70. — *Définition.* J'appelle *angle plan* la portion de plan engendré par une semi-droite ox perpendiculaire à une droite zz' , dans un mouvement de rotation limité autour de zz' .

Il convient d'étudier d'abord les angles plans situés dans un plan donné et ayant un *sommet* donné. On définit sans difficulté l'égalité, l'inégalité, la somme. On montre qu'on peut retourner un angle sur lui-même et par suite que la somme de deux ou plusieurs angles est commutative et associative. On démontre facilement qu'on peut partager un angle en deux parties égales. Enfin, si A et B sont deux angles, et si B n'est pas nul, on peut toujours trouver un entier n tel que l'on ait $nB > A$. Cette proposition peut être admise comme postulat. On peut d'ailleurs la démontrer, si on a soin de démontrer auparavant les théorèmes sur les perpendiculaires et les obliques, ce qui n'offre aucune difficulté.

Les angles sont donc des grandeurs directement mesurables. On comparera ensuite entre eux des angles quelconques en s'appuyant sur le théorème du n° 62.

On peut répéter pour les *arcs de cercle* tout ce qui a été dit pour les angles.

Dièdres.

71. — La théorie des *dièdres* sera calquée sur celle des angles. On étudiera d'abord les dièdres engendrés par un semi-plan tournant autour de son arête. On constatera, après avoir défini le *rectiligne* : qu'un dièdre peut être retourné sur lui-même en laissant fixe le sommet du rectiligne ; que la somme des dièdres est commutative et associative ; que les dièdres sont des grandeurs directement mesurables. Enfin, comme les dièdres sont proportionnels à leurs rectilignes, on déduira que tous les rectilignes d'un même dièdre sont égaux, et qu'on peut faire glisser un dièdre sur lui-même le long de son arête. On saura alors comparer deux dièdres d'arêtes quelconques.

72. — *Définition.* J'appelle *déplacement axial*, d'axe A , le produit d'une rotation autour de A par un glissement plan rectiligne le long de A . On démontrera sans peine que :

THÉORÈME. *Un déplacement axial ne change pas quand on intervertit la rotation et le glissement.*

Corollaire. Si A est le déplacement axial, R la rotation, G le glissement, on a

$$A = RG = GR$$

$$A^2 = RG \cdot RG = R \cdot R \cdot G \cdot G = R^2 G^2$$

et plus généralement

$$A^n = R^n G^n$$

où n est un nombre quelconque.

J'appelle *mouvement axial* un mouvement défini par des déplacements axiaux. Un tel mouvement est à deux paramètres. J'appelle mouvement *helicoidal* un mouvement axial dans lequel l'angle de rotation varie proportionnellement à l'amplitude du glissement.

Après avoir défini deux plans perpendiculaires, on démontrera les théorèmes suivants :

73. — THÉORÈME. *Si deux plans sont perpendiculaires et si d'un point de l'un on abaisse la perpendiculaire D sur l'intersection, cette droite D est perpendiculaire à l'autre plan.*

74. — THÉORÈME. *Si deux plans sont perpendiculaires et si par un point de l'intersection on mène la perpendiculaire à l'un, elle est dans l'autre.*

75. — THÉORÈME. *Deux perpendiculaires à un même plan sont dans le même plan.*

76. — THÉORÈME. *Par un point pris hors d'un plan on peut abaisser sur ce plan une perpendiculaire et une seule.*

77. — THÉORÈME. *Si deux plans sont perpendiculaires et si d'un point de l'un on abaisse la perpendiculaire sur l'autre, elle est toute entière dans le premier.*

On étudiera ensuite les projections orthogonales, la symétrie, les perpendiculaires et les obliques, les triangles, les trièdres.

II. — LES TRANSLATIONS

Glissements plans rectilignes.

78. — *Définition.* J'appelle *espace euclidien*, tout espace lobatschefskien qui satisfait au postulat suivant.

79. — *Postulat XII.* *Le groupe des déplacements lobatschefskiens admet un sous-groupe invariant.*

Les déplacements d'un espace euclidien s'appelleront des *déplacements euclidiens*. Les déplacements du sous-groupe invariant s'appellent des *translations*.

Un *mouvement de translation* est un mouvement défini par un ensemble continu de translations.

80. — THÉORÈME. *Toute translation qui laisse un point fixe est la translation identique.*

Supposons qu'une translation T laisse fixe un point A . D'après un théorème précédent, cette translation serait équivalente à une rotation R_0 , d'angle α autour d'un axe $\mathcal{A}_0$ passant par A .

Je dis que, s'il en était ainsi, toute translation serait une rotation. En effet, une rotation R , d'angle α , autour d'un axe quelconque $\mathcal{A}$, peut être considérée comme la transformée de la rotation R_0

par un des déplacements qui amènent $\mathcal{A}_0$ sur $\mathcal{A}$. Comme les translations forment un sous-groupe invariant, la rotation R serait encore une translation.

De plus, toutes les rotations d'angle $\alpha, 2\alpha, \dots n\alpha$ seraient des translations, puisque les translations forment un groupe.

Je dis maintenant qu'une rotation R d'angle quelconque serait une translation. Pour le prouver, je vais montrer qu'on peut toujours considérer une rotation quelconque R d'angle ρ autour d'un axe $\mathcal{A}$, comme le produit de deux rotations R_1 et R_2 , d'angle α , autour de deux axes $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ concourants en O sur $\mathcal{A}$. Si on construit en effet les droites D_1 et D_2 telles que

$$D_1 = D \cdot R_1^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$D_2 = D \cdot R_2^{\frac{1}{2}}$$

on sait que $\mathcal{A}$ devra être perpendiculaire à D_1 et D_2 et $\rho = 2(D_1, D_2)$ si $R = R_1 \cdot R_2$.

Or le trièdre O, DD_1D_2 est isocèle; ses faces sont égales à $\frac{\alpha}{2}$ et la base à $\frac{\rho}{2}$. Cherchons si on peut construire ce trièdre connaissant $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\rho}{2}$. Si nous menons par D le plan DX perpendiculaire au plan D_1D_2 , nous sommes ramenés à construire le trièdre rectangle DD_1X . Comme X est la projection de D_1 sur le plan DX , nous devons mener par le point O , dans le plan DX , une semi-droite D qui fasse avec D_1 un angle égal à $\frac{\alpha}{2}$; comme l'angle de D_1 avec X est égal à $\frac{\rho}{4}$ on sait que le problème est possible si

$$\frac{\rho}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2^{dr} - \frac{\rho}{4}.$$

Si cette condition est remplie, la rotation donnée R serait le produit de deux rotations R_1 et R_2 d'angle α . Comme ces rotations seraient des translations, et que les translations forment un groupe, R serait une translation.

Si la condition précédente n'est pas remplie, on peut trouver une rotation R' d'angle $\rho' = \frac{\rho}{n}$ telle que l'on ait :

$$\frac{\rho'}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2^{dr} - \frac{\rho'}{4}$$

en prenant n assez grand. Alors la rotation R' serait une translation et il en serait de même de la rotation $R = R'^n$.

Donc, si une translation laissait fixe un point A , sans être la translation identique, toutes les rotations seraient des translations. Par suite un déplacement quelconque serait aussi une translation, puisque tout déplacement est le produit de deux rotations; et le groupe des translations ne serait pas un sous-groupe du groupe des déplacements, mais ce groupe lui-même.

81. — *Corollaire.* Il y a une translation et une seule qui amène un point A en un point donné A' .

Soit T_0 une translation quelconque qui amène un point quelconque M en M' . On peut toujours construire un triangle isocèle $AA''A'$ ayant AA' pour base et tel que $AA'' = A'A'' = MM'$. Effectuons un déplacement qui amène MM' sur AA'' . La translation T_0 se transforme en une translation qui amène A en A'' puisque les translations forment un sous-groupe invariant. De même il y a une translation T'' qui amène A'' sur A' . Donc A' provient de A par le produit $T'T''$, c'est-à-dire par une translation T .

Il n'y a qu'une translation T qui amène A sur A' . S'il y en avait une autre T_1 la translation T_1T^{-1} laisserait A fixe. Ce serait la translation identique et on aurait $T = T_1$.

Une translation est donc clairement désignée par deux points homologues.

82. — *Remarque.* Pour définir un mouvement de translation il suffit de se donner un ensemble continu de points M' homologues de M et comprenant le point M . Le mouvement peut donc être à 3, 2, 1 paramètres. S'il est à un paramètre, il suffit de se donner la trajectoire du point M . Si cette trajectoire est rectiligne le mouvement de translation est dit *mouvement de translation rectiligne*.

83. — *THÉORÈME.* Dans une translation, toute droite qui joint deux points homologues glisse sur elle-même.

Soient la translation T et un point A . Posons $B = AT$ et $C = BT$. Désignons par R une rotation quelconque autour de AB de sorte que $A = AR$, $B = BR$, $C' = CR$. Puisque les translations forment un sous-groupe invariant, la transformée de T par R est une translation T' , telle que $B = AT'$ et $C' = BT'$. D'où :

$$B = BT^{-1}T'.$$

Donc $T^{-1}T'$ est la translation identique. Par suite, comme on a aussi $C' = CT^{-1}T'$, C' et C sont confondus. Donc C est sur la charnière AB .

84. — *Corollaire.* Dans un mouvement de translation rectiligne

tous les points décrivent des droites. On appelle ces droites des *glissières*.

THÉORÈME. *Dans une translation, tout plan qui passe par une glissière glisse sur lui-même.*

Considérons en effet la translation T qui amène M en M' . Soit P un semi-plan d'arête MM' , P' sa position homologue. P' dérive de P par un mouvement axial $A = GR$. G étant le mouvement de glissement plan rectiligne de P et de MM' sur eux-mêmes, et d'amplitude MM' , R le mouvement de rotation d'angle α qui amène P sur P' . Considérons le mouvement de translation rectiligne MM' . Puisqu'il est défini par un ensemble continu de translations, α varie d'une manière continue dans ce mouvement et on peut trouver un nombre entier n assez grand tel que α passe par la valeur $\frac{4dr}{n}$ comprise entre zéro et α . A cet instant le point M est venu en M_1 entre MM' , tel que $MM_1 = a$, par un mouvement de translation T_0 , qui est un mouvement axial d'amplitude a et d'angle $\frac{4dr}{n}$. Dès lors, le mouvement de translation T'' sera un mouvement axial d'amplitude na et d'angle $4dr$, et par suite sera équivalent à un glissement plan rectiligne.

Donc toutes les translations d'amplitude na sont des glissements plans rectilignes. Si nous construisons dans le semi-plan P le triangle isocèle $MM''M'$ de base MM' et de côtés na , la translation MM'' est un glissement plan rectiligne; de même la translation $M''M'$. Le produit de ces deux translations, c'est-à-dire la translation MM' est donc aussi un glissement plan rectiligne.

Tout plan passant par une glissière s'appelle un *plan de glissement*.

85. — **THÉORÈME.** *La transformée d'une translation par une transposition autour d'une perpendiculaire à un plan de glissement est la translation inverse.*

Soit O est le pied de la perpendiculaire Oz sur le plan P , et T une translation. Soit $O' = OT$. La transposition autour de Oz laisse O fixe et amène O' en O'_1 dans le plan P . O'_1 est symétrique de O' par rapport à O . La transformée de T est la translation qui amène O en O'_1 ; c'est manifestement la translation inverse de T .

86. — **THÉORÈME.** *Le produit de deux translations est commutatif.*

Soit en effet T une translation qui amène O en O' . Puis T' une translation qui amène O' en O'' . Faisons la transposition autour de la perpendiculaire au milieu de $O'O''$, au plan $OO'O''$. O vient en O'' , O'' en O et O' en O'_1 . Or la translation qui amène O en O'_1 est la transformée de celle qui amène O'' en O' , c'est donc l'inverse de T'^{-1} , c'est-à-dire T' . De même la translation qui amène O'_1 en O'' est égale à T . Donc $TT' = T'T$.