La seconde partie du livre traite des transformations quadratiques ou birationnelles dans l'espace. Le plan suivi est très analogue à celui de la première partie : relations algébriques, sections sphériques imaginaires et transformation par rayons vecteurs réciproques. Les applications de ces transformations à la projection stéréographique, à la géométrie de la sphère, aux cyclides de Dupin et aux surfaces anallagmatiques sont particulièrement intéressantes.

Nous ne pouvons pas entrer dans tout le détail des exemples et des sujets traités, mais c'est avec plaisir que nous recommandons l'excellent Ouvrage de M. Dœhlemann à tous ceux qui s'intéressent à la géométrie moderne.

L. Crelier (Bienne-Berne).

H. Hartl. — **Erste Einführung in die Elemente der Differential- und Integralrechnung** und deren Anwendung zur Lösung praktischer Aufgaben. — 1 vol. in-8°, 58 p. ; Franz Deuticke ; Wien und Leipzig.

A une époque où l'on est de plus en plus porté à faire figurer au programme de l'enseignement secondaire les éléments du calcul infinitésimal, le livre de M. Hartl arrive à propos. Ce petit recueil s'adresse principalement aux jeunes gens qui ont eu une préparation incomplète, et qui désirent néanmoins avoir un aperçu de cette théorie. Par suite du but que s'est proposé l'auteur, ce dernier n'a pu donner toute la rigueur voulue aux démonstrations ; il a surtout recherché une compréhension facile et rapide du sujet. Quelques applications pratiques montrent toute l'importance de ce calcul ; en outre, chaque chapitre renferme des exercices et leurs solutions.

E. Landau. — **Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.** — 2 vol. gr. in-8° comprenant au total un millier de pages ; B. G. Teubner, Leipzig.

La suite des nombres premiers est illimitée. — Toute progression arithmétique dont la raison et le premier terme sont des nombres premiers entre eux, contient une infinité de termes qui sont des nombres premiers absolus.

Le premier de ces théorèmes est un cas particulier du second. L'une de ces démonstrations, devenue classique, se trouve déjà chez Euclide. Celle du second, en revanche, coûta les plus grands efforts et ce fut Dirichlet qui eut l'honneur d'y parvenir en 1837. En l'obtenant au moyen des séries qui portent son nom, il ouvrit à la théorie des nombres des voies inconnues et devint pour ainsi dire le véritable créateur d'une nouvelle discipline, l'arithmétique analytique.

Plus tard vint Riemann. Dans un mémoire, que personne n'ignore et daté de 1859, Riemann, faisant preuve d'une divination inouïe, donna une formule désormais historique relative au nombre des nombres premiers inférieurs à un nombre donné, dont se sont occupés depuis, bon nombre de mathématiciens éminents, parmi lesquels MM. Hadamard, von Mangoldt, de la Vallée Poussin et Landau[1]. Riemann obtint ce résultat capital en partant de considérations profondes sur la fonction

$$\mathrm{S}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

[1] Au sujet du rôle exact de chacun de ces géomètres dans les recherches que nécessita le mémoire de Riemann, voir aussi Landau, « Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. » (*Ann. de l'Ecole normale,* t. 25, 3me série, 1908).

qui n'est en définitive que l'une des plus importantes d'entre les suites de Dirichlet.

Préoccupé d'éclaircir une foule de questions aussi difficiles qu'attrayantes, se rattachant aux deux théorèmes du début de cette Note, M. Landau, depuis dix ans, a multiplié ses recherches. Ses deux livres, dont il faut chercher l'origine dans ses cours de Berlin et de Göttingen, contiennent l'exposé de ses nombreux travaux. Ils renferment tout ce qu'on connaît jusqu'à ce jour relativement à la répartition des nombres premiers et nul, mieux que M. Landau, n'aurait pu les écrire. Ils sont élémentaires et n'exigent du lecteur, à côté, bien entendu, d'une bonne maturité d'esprit, que la connaissance des premiers théorèmes de la théorie des nombres et des premiers chapitres de celle des fonctions, de l'intégrale de Cauchy, avec toutes les conséquences classiques qu'il est possible d'en tirer.

Les deux livres comprennent six parties principales, augmentées d'une introduction historique, p. 1 à 55, d'un chapitre consacré à l'indication des sources, p. 883 à 907, et enfin d'un index bibliographique, p. 908 à 961, portant sur un total de plus de six cents travaux dus à deux cent vingt auteurs environ. Voici très succintement le contenu des six parties.

1re partie (p. 59 à 388). — Etablissement de la formule asymptotique

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log x}} = 1 \tag{1}$$

dans laquelle $\pi(x)$ représente le nombre des nombres premiers inférieur au nombre x et où $\log x$ est le logarithme naturel de x.

Cette formule, dont Gauss avait eu l'intuition dans sa jeunesse, ne fut établie qu'en 1896 par MM. Hadamard et de la Vallée Poussin. Leurs découvertes furent indépendantes. L'exposition de M. Landau est indépendante de celle de ces deux savants, dont il a simplifié les démonstrations.

2me partie (p. 391 à 564). — Etablissement de la formule qui correspond à la formule (1), lorsque la suite de nombres considérés est une progression arithmétique, dont la raison et le premier terme sont des nombres premiers entre eux.

Application de la théorie précédente à des décompositions des nombres entiers en sommes de carrés et de cubes, et à la recherche du plus grand diviseur premier de certains produits. Ces deux premières parties contiennent du reste, § 82 à 88 et § 133 à 138, une démonstration rigoureuse de la formule de Riemann que M. Landau étend aussi au cas où la suite naturelle des nombres se trouve remplacée par une progression arithmétique.

La formule de Riemann (introduction historique, p. 36), n'est pas équivalente à la formule (1) ci-dessus indiquée. Cette dernière la surpasse de beaucoup en importance.

3me et 4me parties (p. 567 à 637). — Ces deux parties sont consacrées, entre autres, à l'étude des fonctions arithmétiques $\mu(n)$ et $\lambda(n)$ de Möbius et de Liouville, lorsque n appartient soit à la suite des nombres naturels, soit à une progression arithmétique.

Un chapitre important est le 3me, où M. Landau déduit directement de l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\log n}{n} = -1 \tag{2}$$

la formule (1) relative à la fréquence des nombres premiers. Dans cette formule $\mu(n)$ est défini, comme on sait, de la façon suivante : $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$, lorsque n est divisible par un carré parfait ; $\mu(n) = (-1)^\rho$, lorsque n est égal au produit de ρ facteurs premiers distincts. Log n est le logarithme naturel de n.

La déduction faite par M. Landau est importante parce qu'elle donne la raison véritable pour laquelle Tschebyschef et ses successeurs n'ont pu aboutir à la formule (1) en suivant la voie qu'ils avaient adoptée.

5me *partie*. — Dans celle-ci l'on rencontre certaines séries numériques classiques envisagées les unes par Euler, les autres par Möbius et d'autres enfin par Cesàro. On trouve, par exemple, chez Euler[1], l'égalité suivante

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \dots , \tag{3}$$

dont le second membre s'écrirait, en notation moderne,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\,\lambda(n)}{n} ,$$

où

$$\chi(n) = 0\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1 \qquad \text{pour} \qquad n \equiv 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ (\text{mod } 4)\ .$$

$\lambda(n)$ est la fonction arithmétique de Liouville définie comme suit :

$$\lambda(1) = 1\,, \qquad \lambda(n) = (-1)^\rho\,,$$

où ρ désigne le nombre des facteurs premiers dont n est le produit, ces facteurs étant comptés avec leur ordre de multiplicité.

Pour la première fois, comme il le fait d'ailleurs pour une foule d'autres égalités semblables, M. Landau établit la convergence du second membre de (3), qu'il évalue ensuite facilement.

6me *partie* (p. 723 à 882). — Cette 6me partie comporte un exposé complet et systématique de la théorie des suites de Dirichlet qui, dans le cas le plus général, sont de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

où λ_n représente une suite de quantités réelles tendant vers l'infini en croissant constamment avec n. Ce dernier exposé était utile. Il complète et résume très heureusement beaucoup de propositions relatives à ces remarquables séries dont M. Landau fait un usage constant d'un bout à l'autre de sa colossale entreprise.

Ce qui précède n'en est pas un résumé, encore moins une analyse. Seuls quelques jalons, isolés mais importants sans doute, ont été jetés dans les lignes qui précèdent.

Les deux livres de M. Landau, émaillés partout de remarques historiques intéressantes, sans être difficiles à lire, ne peuvent l'être qu'avec une attention soutenue. Mais ils en valent la peine. Comme tous ceux qui se sont

---

[1] EULER. *Introductio in analysin infinitorum.* t. 1., Lausanne, Bousquet, 1748, p. 244.

occupés d'arithmétique, comme les Fermat, les Legendre, les Euler ou les Gauss, tous ceux qui feront cette étude seront saisis d'admiration pour les merveilleuses propriétés du nombre entier, propriétés qui, dès la plus haute antiquité, ont toujours éveillé l'enthousiasme et exercé la sagacité des penseurs les plus profonds de toutes les époques.

Gustave Dumas (Zurich).

G. de Laplanche. — **Etude sur les angles imaginaires.** — 1 vol. in-16, 135 p.; 3 fr.; Hermann, Paris.

Une quantité imaginaire peut toujours s'écrire sous la forme $e^{-\beta}(\cos\alpha + i\sin\alpha) = e^{i(\alpha+\beta i)}$. Si elle est le rapport de deux autres quantités imaginaires, α est l'angle des vecteurs représentatifs de ces deux quantités. La quantité $\alpha + \beta i$, comme le rapport lui-même, ne dépend que des deux vecteurs et rien n'empêche de lui donner le nom d'angle (imaginaire). On conçoit aussi que l'on puisse en faire l'élément d'un calcul géométrique.

C'est à développer quelques applications d'un tel calcul, que s'applique l'auteur, après avoir exposé assez longuement les éléments de la théorie des imaginaires.

Il est à peine besoin de signaler que le calcul ainsi mis en lumière se confond, à très peu de chose près, avec celui des équipollences de Bellavitis.

E. Combebiac (Montauban).

Ernest Lebon. — **Henri Poincaré,** Biographie, Bibliographie analytique des écrits, (Collection des *Savants du Jour*). — 1 vol. gd 8°, de VIII-80 p., papier de Hollande, avec un portrait en héliogravure; 7 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

M. Lebon vient d'entreprendre la publication d'une collection intitulée « *Les Savants du Jour* ». Chaque volume contiendra, avec les indications biographiques, une bibliographie analytique des écrits. Une pareille collection est appelée à rendre de grands services, car il y a un véritable intérêt pour le chercheur à être renseigné sur l'ensemble des travaux d'un même savant.

L'auteur de l'*Histoire abrégée de l'Astronomie* était particulièrement bien qualifié pour entreprendre la rédaction de ces monographies, et il a été bien inspiré en mettant sa collection sous l'égide d'un nom d'une réputation aussi universelle.

Dans le premier chapitre on lira avec plaisir la partie biographique du spirituel discours prononcé par M. Fr. Masson, Directeur de l'Académie française, en recevant M. Henri Poincaré.

La liste des écrits, arrêtée au premier juillet 1909, comprend 436 titres que M. Lebon a répartis en 6 sections : *Analyse mathématique. — Mécanique analytique et mécanique céleste. — Physique mathématique. — Philosophie scientifique. — Nécrologie. — Publications diverses.*

En faisant précéder chacune de ces sections d'appréciations dues à des hommes illustres, M. Lebon a augmenté l'intérêt du recueil et fait oublier la sécheresse inévitable des énumérations de titres. Il importe de remarquer que le manuscrit a été soumis à M. Poincaré qui a également lu et approuvé les dernières épreuves de cet Opuscule.

H. Fehr.