Sur les remarques de M. Timerding.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

matico di Palermo[1]. C'est donc à ces notes que nous devrons toujours nous reporter pour répondre aux critiques qui nous ont été faites.

Les idées que nous avons exposées dans ces travaux ont été ensuite développées dans deux livres qui viennent de paraître[2].

Après avoir rappelé tout cela, qu'il nous soit permis de répondre brièvement aux observations de MM. Timerding et Wilson, pour éclaircir surtout quelques questions scientifiques étroitement liées à la question des notations vectorielles.

Sur les remarques de M. Timerding.

1. M. Timerding a présenté sans doute des observations très intéressantes. Nous trouvons aussi, comme M. Peano, très opportunes les modifications de $\times$ et $\wedge$ en $\times$ et $\wedge$, indépendamment des difficultés typographiques, ainsi que les locutions proposées par M. Timerding. Nous n'insistons pas davantage sur la notation *mod*, et nous trouvons très concluants les arguments de M. Peano pour changer *mod* en T, ou M, ou m. La notation $|\mathbf{a}|$ est à rejeter absolument ; elle empêcherait l'usage du signe | *(index)* très utile dans le système de Grassmann ; elle est contraire à toutes les notations employées pour les fonctions, et nous ne pouvons pas admettre, avec M. Timerding, que mod $\mathbf{a}$ « *n'est pas une fonction proprement dite* ».

Mais le changement de — en -, ne nous paraît pas admissible. En voici les raisons. Avant tout si, comme a observé justement M. Peano, les *petits signes* ont le but de *lier* et les *grands signes* celui de *séparer*, le changement proposé donnerait au signe — une signification qu'il n'a certainement pas.

L'observation que, sans les formations géométriques F_1 de première espèce de Grassmann, d'une équation de la forme

$$A - S + B - S + C - S = 0 ,$$

on ne peut pas déduire

$$S = \frac{A + B + C}{3} ,$$

est juste (Nota II, n[os] 6, 7) ; mais cette résolution devient possible dès que l'on a fixé l'algorithme de ces formations, qui fait partie du système minimum.

---

[1] *Per l'unificazione delle notazioni vettoriali*. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo ; Nota 1ª, t. XXIII, 324-328 (1907) ; Nota 2ª, t. XXIV, 65-80 ; Nota 3ª, t. XXIV, 318-332 (1907) ; Nota 4ª, t. XXV, 352-375 ; Nota 5ª, t. XXVI, 369-377 (1908).

[2] *Elementi di Calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla Geometria, alla Meccanica e alla Fisica-matematica*. Bologna, N. Zanichelli, 1909 ; pp. I-V ; 1-174.

Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla Fisico-matematica. Torino, G.-B. Petrini, 1909 ; pp. I-XI, 1-111.

Enfin il y a une autre considération pour ne pas accepter ce changement. On peut déduire tous les systèmes vectoriels de celui de Grassmann, et de tout système vectoriel (y compris le système minimum) on doit pouvoir déduire le système de Grassmann (Note V, n° 36); or, dans celui-ci, on ne saurait pas changer $+$ et $-$, qui ont toutes les propriétés des mêmes signes algébriques, en $+$ et $-$.

2. La notation de bivecteur est certainement nécessaire; sur ce point, non seulement nous sommes de la même opinion que M. Timerding, mais nous allons bien plus loin encore, car nous croyons nécessaire tout entier le beau système de Grassmann (Note V, n° 36). Cependant il y a des cas où cette notion n'est pas nécessaire et les applications que nous avons faites, sans nous servir de la notion de bivecteur, n'ont rien perdu, croyons-nous, de leur caractère géométrique.

M. Timerding croit, peut-être, que ce prétendu défaut de caractère géométrique dérive de l'impossibilité de considérer le produit interne d'un vecteur $\mathbf{u}$ par un bivecteur φ.

Or il est facile de voir que cette impossibilité subsiste encore même après l'introduction des bivecteurs et des trivecteurs.

Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des vecteurs; φ et ψ des bivecteurs, et si les produits internes (ou scalaires) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $\varphi \times \psi$, ont la signification usuelle, l'on a

$$(1) \qquad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \mid \mathbf{v}}{\Omega}, \qquad \varphi \times \psi = \frac{\varphi \mid \psi}{\Omega};$$

Ω est le trivecteur unité; $\mid \mathbf{v}$ le bivecteur (index) de $\mathbf{v}$; $\mid \psi$ le vecteur (index) de ψ; $\mathbf{u} \mid \mathbf{v}$ le produit alterné (progressif) de $\mathbf{u}$ par $\mid \mathbf{v}$; $\varphi \mid \psi$ celui de φ par $\mid \psi$.

Le produit scalaire $\mathbf{u} \times \varphi$ de $\mathbf{u}$ et φ, est, pour M. Timerding, le volume d'un parallélipidède dont la base est φ, et $\mathbf{u}$ est l'arête. Par conséquent

$$(2) \qquad \mathbf{u} \times \varphi = \frac{\mathbf{u}\varphi}{\Omega},$$

puisque $\mathbf{u}\varphi$ est le produit alterné de $\mathbf{u}$ et φ (trivecteur).

Alors pour le produit scalaire $\mathbf{u} \times (\mid \varphi)$, ou brièvement $\mathbf{u} \times \mid \varphi$, de $\mathbf{u}$ et $\mid \varphi$, on aura, d'après (1),

$$(3) \qquad \mathbf{u} \times \mid \varphi = \frac{\mathbf{u} \mid \mid \varphi}{\Omega} = \frac{\mathbf{u}\varphi}{\Omega},$$

puisque l'opérateur $\mid$ a pour carré l'unité.

Les expressions (2) et (3) montrent que la notation $\mathbf{u} \times \varphi$ n'est pas régulière et doit être remplacée par $\mathbf{u} \times \mid \varphi$.

On peut certainement admettre la notation $\mathbf{u} \times \varphi$; mais à condition de rejeter les notations (1), qui sont acceptées par tous les auteurs.

L'opération $\wedge$ confirme la régularité de la notation $\mathbf{u} \times | \varphi$ et l'irrégularité de l'autre $\mathbf{u} \times \varphi$. En effet, si φ est le produit alterné des deux vecteurs **a**, **b**, on a

$$| \varphi = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} ,$$

et, pour (3),

$$\mathbf{u} \times | \varphi = \mathbf{u} \times \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} ,$$

qui exprime le volume considéré par M. Timerding, tandis que de (2) on obtiendrait

$$\mathbf{u} \times \varphi = \mathbf{u} \times (\mathbf{ab}) .$$

et le second membre n'a pas de signification.

3. Dans les *Elementi*, p. 72; et dans les *Omografie vettoriali*, n° 25, p. 61, nous avons donné les deux formules

$$\Delta m = \text{div grad } m$$
$$\Delta' \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} .$$

On voit aussitôt quelle immense différence il y a entre les deux opérateurs Δ et Δ', pour lesquels les auteurs ont adopté la seule notation Δ_2 ou ∇, parce que ces opérateurs ont la même expression cartésienne. Ce n'est pas une raison qui peut justifier l'usage d'un seul signe pour indiquer des choses bien différentes ; au contraire, elle prouve encore une fois que l'usage systématique des coordonnées peut faire envisager des *pseudo-opérateurs* qui n'ont plus de caractère géométrique et logique ! L'exemple des quaternions de Hamilton est très instructif (Note III, n° 15).

M. Timerding croit trouver une autre justification, puisqu'il observe que l'on a une même notation pour la dérivée de u (nombre) ou de **u** (vecteur) par rapport à une direction **n** (vecteur) fonctions d'un point P, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial n} , \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} .$$

Même en faisant abstraction du défaut de caractère absolu de la notation $\frac{\partial}{\partial n}$, car il n'est pas possible de définir n ; nous voulons lui faire observer que, dans ce cas, *l'application d'un même signe* $\frac{\partial}{\partial n}$ (à n ou à **u**) *n'est pas illogique;* car nous avons, sous la forme absolue,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{du}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} , \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial' n} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} \mathbf{n}$$

et $\frac{d}{dP}$ est toujours le symbole d'une transformation linéaire (*Omografie vettoriali*, n° 21, p. 45) applicable à un nombre, à un vecteur ou à une homographie fonctions de P. C'est donc un cas bien différent de celui de ∇.

4. M. Timerding dit enfin : « *De plus, on doit se demander, comment il faut définir les opérations, quand on ne veut pas se servir des méthodes cartésiennes, comme est, à ce qu'il paraît, dans les idées des auteurs.* »

La réponse à cette question a été déjà donnée dans nos deux livres : *Elementi*, pp. 66-74; *Omografie vettoriali*, n° 22-25, pp. 49-64.

A la fin de son important article, M. Timerding a bien voulu reconnaître l'importance de l'unification des notations vectorielles, car « *le désaccord actuel dans la terminologie vectorielle est presque sans exemple* » ; et le progrès réel qu'il y aurait si nos notations rationnelles étaient adoptées.

En le remerciant de son *adhésion presque entière* à notre système, nous espérons atteindre le but, que nous poursuivons depuis quelques années, par nos travaux et surtout par nos deux livres.

Sur les remarques de M. Wilson.

1. La variété des notations employées dans le calcul différentiel et intégral est seulement formelle; elle est parfaitement logique, et n'a rien à voir avec le *chaos* des notations vectorielles.

Ainsi en analyse, la dérivée (totale ou partielle), l'intégrale (simple ou multiple) sont désignées par des opérateurs qui peuvent indifféremment changer de forme et de position.

Dans le calcul vectoriel, au contraire, pour le produit vectoriel de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, on a la notation complète $\mathrm{V}\{(\mathrm{I}^{-1}\mathbf{a})(\mathrm{I}^{-1}\mathbf{b})\}$, abrégée en $\mathrm{V}(\mathbf{ab})$; la notation $|(\mathbf{ab})$, qui, dans le calcul de Hamilton et de Grassmann, sont très exactes. V et $|$ sont des symboles de fonction d'une seule variable; c'est-à-dire, dans les deux cas, le produit quaternional de deux quaternions droits ou le produit alterné de deux vecteurs (bivecteur).

Pour les auteurs qui, ne faisant pas usage des quaternions, emploient la notation abrégée de Hamilton, $\mathrm{V}(\mathbf{ab})$ est fonction d'un certain produit (le *produit complet*) que nous n'avons pas encore réussi à comprendre, ou bien il est fonction de deux variables.

Dans les notations $[\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{a} \,,\, \mathbf{b}]$ le symbole de fonction est $[\ ]$, contrairement à toutes les lois ordinaires algébriques et l'on ne sait pas s'il s'agit d'une fonction d'une ou de deux variables. Enfin, dans la notation de Gibbs, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; et dans la nôtre, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, l'*opération* a pris la place de la *fonction*.