SUR UNE INTRODUCTION PREMIÈRE DES LOGARITHMES

Autor(en): **Suppantschitsch, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-11869

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

mant le tore à points doubles imaginaires par l'inversion, le centre d'inversion étant un point de la surface du tore. Ainsi les deux groupes de cercles du tore situés dans les plans par l'axe et dans les plans perpendiculaires à l'axe se transforment dans les deux groupes des cercles c_α et c_β.

Pour plus de développements concernant les cyclides, nous renvoyons aux livres magistraux de MM. DARBOUX et REYE.

P.-H. SCHOUTE (Groningue).

SUR UNE INTRODUCTION PREMIÈRE DES LOGARITHMES

1. — Dans un ouvrage récent, M. KLEIN[1] suggère une première introduction des Logarithmes qui se rapproche du procédé employé depuis longtemps dans la théorie des fonctions. Cette idée, déjà signalée d'ailleurs par M. J. Tannery[2], me semble avoir un intérêt tout particulier, car elle permet d'éviter les nombreuses inexactitudes qui se trouvent dans l'exposition dite élémentaire de la théorie des logarithmes.

En outre, il sera souvent nécessaire d'introduire les logarithmes bien avant de donner quelques notions des intégrales définies, sans avoir toujours recours au théorème du changement des variables dans toute sa généralité et plus particulièrement du théorème que voici :

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_{x_1}^{xx_1} \frac{dx}{x} .$$

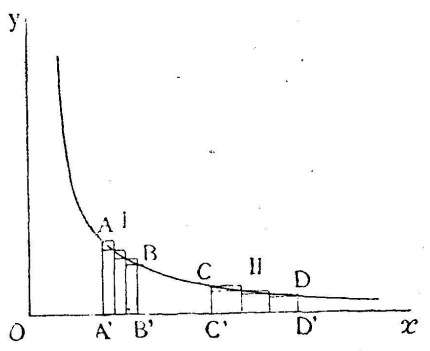
Je veux donc indiquer ici une marche que l'on peut suivre dans cette partie de l'enseignement.

2. — Considérons l'hyperbole K (fig. 1) dont l'équation est :

$$xy = 1 ,$$

[1] *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* I. Cours autographié; Leipzig, 1908.
[2] *Notions de mathématiques.* Paris, 1903.

et le point A des coordonnées 1, 1. Menons l'ordonnée BB′ du point B, soit $OB' = x$. Prenons ensuite les points C, d'abscisse c, et D tels que



$$C'D' = \frac{OC'}{OA'} \cdot A'B' \qquad (1)$$

Nous allons démontrer que l'aire comprise entre les ordonnées de A et B est égale à l'aire comprise entre les ordonnées de C et D.

Subdivisons chacun des intervalles AB et CD en p intervalles égaux. Il est clair que les intervalles de CD seront plus grands que les intervalles de AB. Désignons par h l'intervalle de AB. Les intervalles de CD ont alors les longueurs h_1 :

$$h_1 = ch \ .$$

Aux intervalles h et h_1 correspondent les rectangles qui donnent par des valeurs approchées par excès et par défaut les aires considérées plus haut; la subdivision est d'ailleurs quelconque.

A chaque rectangle de la première aire (I) correspond un rectangle de la seconde (II) qui lui est égal.

Considérons en effet, pour fixer les idées, les n^{mes} rectangles de I qui sont :

$$\overline{r_n} = \frac{1}{1 + (n-1)h} \cdot h \ , \qquad \underline{r_n} = \frac{1}{1 + nh} \cdot h \ .$$

Les rectangles correspondants de II sont alors :

$$\overline{R_n} = \frac{1}{c[1 + (n-1)h]} \cdot ch \ , \qquad \underline{R_n} = \frac{1}{c(1 + nh)} \cdot ch \ .$$

On a donc :

$$\overline{r_n} = \overline{R_n} \ , \qquad \underline{r_n} = \underline{R_n} \ .$$

Et en prenant la limite de leur somme :

$$I = II \ .$$

On peut supposer qu'on a fait glisser l'aire I en la déformant, sous l'hyperbole, vers II.

Désignons maintenant les abscisses des points B, C, D, respectivement par x, x_1, x_2. L'équation (1) donne alors :

$$(x_2 - x_1) = x_1(x - 1)$$

ou :

$$x = \frac{x_2}{x_1} .$$

Nous avons donc le THÉORÈME : *L'aire de l'hyperbole comprise entre deux ordonnées quelconques aux abscisses* x_1 *et* x_2 $(x_2 > x_1 > 1)$ *est égale à l'aire comprise entre les ordonnées des points* A *et* B *aux abscisses* 1 *et* $\frac{x_2}{x_1}$ *respectivement.*

On démontre facilement le même théorème pour : $0 < x_2 < x_1 < 1$.

3. — Nous désignons l'aire I par S_x et l'aire II par S_{x_1, x_2} : il est alors :

$$S_{x_1, x_2} = S_{\frac{x_2}{x_1}} .$$

Considérons maintenant, en partant du point A, deux aires $S_{x'}$ et $S_{x''}$. Pour trouver leur somme faisons glisser la seconde jusqu'à ce qu'elle devienne adjacente à $S_{x'}$.

Elle est alors égale à l'aire $S_{x', x' \cdot x''}$ et nous avons :

$$S_{x'} + S_{x''} = S_{x' \cdot x''} . \qquad (2)$$

Nous appelons l'aire S_x qui correspond à l'abscisse x le *logarithme* de x; soit

$$s = \log x .$$

Nous avons alors :

$$\log x' + \log x'' = \log x' \cdot x'' . \qquad (3)$$

On montre ici l'avantage qu'il y a à employer une table de logarithmes en se servant aussi des formules correspondant à (3) pour les quotients et les puissances.

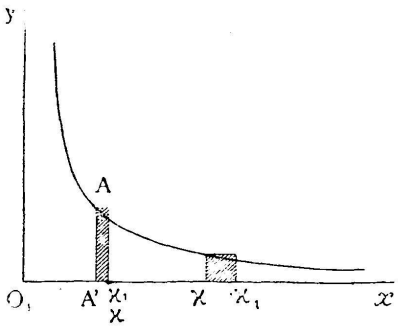
En considérant la somme des surfaces adjacentes l'une à l'autre :

$$s_x + s_{x,x^2} + s_{x^2,x^3} + \ldots + s_{x^{n-1},x^n} = s_{x^n} = n \cdot s_x$$

on prouve que le logarithme d'un nombre x dépasse tout nombre assignable lorsque x croît indéfiniment.

On peut déjà dessiner provisoirement la courbe qui représente la fonction : $s = \log x$.

4. — Considérons deux valeurs S (fig. 2) correspondant aux abscisses x et x_1 ; soient



$$s = \log x \ , \qquad s_1 = \log x_1 \ .$$

Calculons la différence :

$$s_1 - s = \log x_1 - \log x \ .$$

L'aire entre x_1 et x est exprimée par des valeurs approchées, par défaut ou par excès, au moyen des rectangles

$$(x_1 - x)\frac{1}{x_1} \qquad \text{ou} \qquad (x_1 - x)\frac{1}{x} \ .$$

On a donc :

$$\frac{x_1 - x}{x_1} < s_1 - s < \frac{x_1 - x}{x}$$

et

$$\frac{1}{x_1} < \frac{s_1 - s}{x_1 - x} < \frac{1}{x} \ . \qquad (4)$$

Si nous faisons rapprocher x_1 de x, nous obtenons finalement la dérivée :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \ . \qquad (5)$$

Il est à peine nécessaire de remarquer que l'aire comprise entre x et x_1 est égale à l'aire entre A et $\frac{x_1}{x}$. On peut aussi en déduire l'équation (5).

Il est aisé de montrer ici le développement des logarithmes

en série, en supposant toutefois que l'on a déjà donné auparavant quelques notions sur les séries convergentes.

5. — Nous avons considéré s comme fonction de x appelée $\log x$. Nous pouvons aussi considérer x comme une fonction de s que nous désignerons par $\mathrm{E}(s)$. On le voit plus clairement encore en dessinant la courbe $\log x$ mentionnée plus haut.

Nous obtenons la dérivée $\mathrm{E}'(s) = \mathrm{E}(s)$ en écrivant l'équation (4) [en supposant toujours $x > 1$] :

$$\mathrm{E}(s_1) > \frac{\mathrm{E}(s_1) - \mathrm{E}(s)}{s_1 - s} > \mathrm{E}(s)$$

et finalement on en conclut le développement de $\mathrm{E}(s)$:

$$\mathrm{E}(s) = 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \cdots$$

en particulier

$$\mathrm{E}(1) = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

On appelle par définition $\mathrm{E}(s)$ la s^{me} puissance de e

$$\mathrm{E}(s) = e^s$$

et on doit encore montrer que le mot puissance, pour les exposants réels, a la même signification que la puissance élémentaire.

Je me permets de rappeler ici le procédé bien connu de cette démonstration.

On a :

$$s = \log x \ , \qquad x = e^s \ .$$

Donc :

$$\log e^s = s \ , \qquad e^{\log x} = x$$

et

$$e^{\log (x_1 \cdot x_2)} = e^{\log x_1 + \log x_2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = e^{\log x_1 + \log x_2}$$

finalement :

$$e^{s_1} \cdot e^{s_2} = e^{s_1 + s_2} \ .$$

R. SUPPANTSCHITSCH (Vienne).