# II. — Propriétés du triangle sphérique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

que l'image d'une figure F éclairée, fournie par un miroir plan, est une figure symétrique de F, par rapport à ce miroir.

Or, regardez-vous dans une glace plane, et que votre main gauche tire votre oreille gauche, votre image ne vous est pas superposable car elle se tire l'oreille droite.

3. — *Les figures planes sont égales à leurs symétriques.* — Ce fait résulte du théorème suivant (fig. 58) :

Théorème. — *Si on fait tourner une figure plane F autour d'un axe XY situé dans le plan (1) de la figure et si la figure F vient, après la rotation occuper la position F' dans le plan (2) les figures égales F et F' sont encore symétriques par rapport au plan P qui partage en deux dièdres égaux le dièdre formé par les deux demi-plans, (1), XY, d'une part, et, 2, XY, d'autre part.*

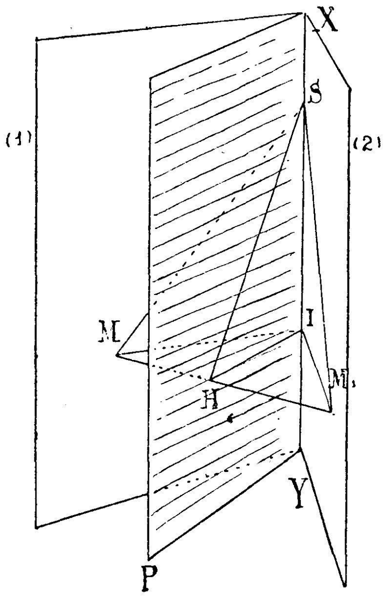


Fig. 58.

En effet tout point S de la figure situé sur l'axe demeure immobile, si donc H est le milieu de la droite qui réunit un point M de la figure à sa nouvelle venue dans la figure F', la droite SH sera perpendiculaire à MM' et bissectrice de l'angle en S du triangle *isocèle* MSM'.

En faisant varier à volonté le point S on voit que la droite MM' est perpendiculaire en H au plan qui passe par H et par XY; en prenant pour S le point I projection commune des points M et M' sur XY on voit de suite que le plan H, XY est le plan qui forme des dièdres égaux avec les plans (1) et (2) ce plan est donc le même pour tous les points M ; or M et M' sont symétriques par rapport à ce plan fixe. Il en est de même des figures F et F'.

*Remarque.* — Ce théorème est la clef des propriétés du triangle sphérique isocèle.

## II. — Propriétés du triangle sphérique.

1. — *Propriété du triangle sphérique dont deux côtés sont égaux.*— Soit (fig. 59) ABC un triangle sphérique isocèle

c'est-à-dire dont les côtés arc AB et arc AC sont égaux. Soient I le milieu de l'arc de base BC, H le milieu de la corde de l'arc de grand cercle BC, et O le centre de la sphère ; il résulte du théorème précédent que : 1° les arcs égaux AB et AC sont symétriques par rapport au plan bissecteur du dièdre (B, OA, C); 2° les arcs égaux BI et IC sont symétriques par rapport au plan bissecteur du dièdre (équivalent à 2 droits) (B, OI, C); de plus, tous deux perpendiculaires à BC au point H, ces deux plans doivent coïncider.

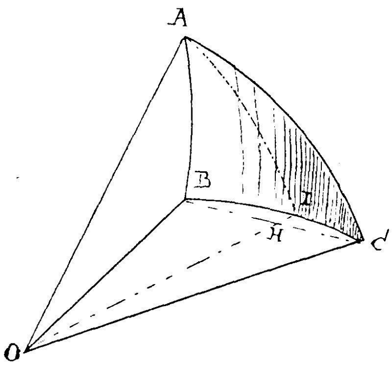

Fig. 59.

Ainsi donc : La figure formée par l'arc de cercle AB, l'arc BI, les deux rayons OA, OB, est symétrique de la figure formée par l'arc de cercle AC, l'arc CI, les deux rayons OA, OC. En particulier les tangentes en B aux deux arcs de grand cercle BA et BC forment un angle plan symétrique de l'angle formé par les tangentes en C aux deux arcs de grand cercle CA et BC, ces deux angles sont donc égaux, et enfin les angles en B et C du triangle sphérique ABC sont égaux; de plus le plan des quatre points A I H O étant le plan de symétrie des deux portions du triangle sphérique considéré, on voit que les deux tangentes en I aux deux arcs IB et IC, portions du même arc BC, sont à la fois *coïncidantes* et *symétriques* par rapport à ce plan, mais hors de ce plan ; elles forment donc une perpendiculaire à ce plan qui est celui de l'arc de grand cercle AI; donc enfin dans le triangle sphérique isocèle l'arc AI qui joint le sommet au milieu de l'arc de base est perpendiculaire à cette base.

2. *Propriété du triangle sphérique dont deux angles sont égaux.* — Soit O le centre de la sphère. Considérons d'abord le cas d'un triangle sphérique ABC (fig. 60) dont les angles en B et C sont droits; A est alors un *pôle*[1] de l'arc de grand cercle BC, c'est-à-dire que le rayon OA est perpendiculaire au plan BOC (théorie du dièdre), les arcs AB et AC égaux chacun à un quadrant[2] sont égaux. Soit H le milieu de BC,

[1] *pôle* d'un cercle de la sphère : point où l'axe du cercle perce la surface sphérique.
[2] *quadrant* ou quart de la circonférence d'un grand cercle.

l'arc AH est dans le plan de symétrie des figures planes BOA et COA, soit D un point quelconque de l'arc AH ; joignons OD, D est à lui-même son symétrique, B et C sont symétriques par rapport au plan ADHO, les angles plans DOB et DOC symétriques sont égaux, donc les arcs BD et DC sont égaux et les angles sphériques $\widehat{DBC}$ et $\widehat{DCB}$ sont égaux.

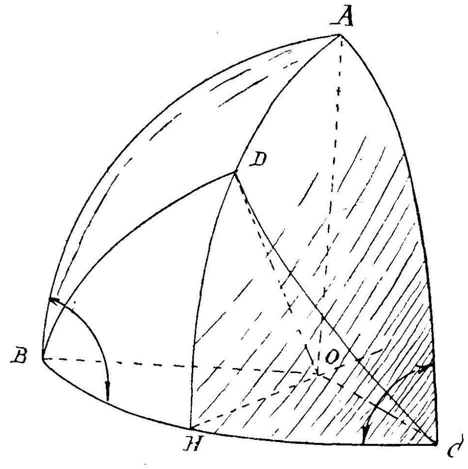


Fig. 60.

Il n'y a d'ailleurs à partir du sommet C qu'un arc de grand cercle faisant avec l'arc de grand cercle BC et d'un côté de cet arc un angle sphérique donné, comme le montre la notion du dièdre.

Conséquence. — Si (fig. 61) un triangle quelconque sphérique A′BC a ses angles en A et C égaux, l'angle DBC étant par exemple aigu, nous considérerons le pôle A de l'arc BC qui est dans le même hémisphère que A′, soit H le milieu de l'arc BC et D le point où l'arc BA′ coupe AH. Joignons D à C par un arc de grand cercle, les arcs DC et A′C feront au-dessus de BC un angle égal à l'angle DBH ; donc ces arcs DC et A′C coïncideront. Donc A′ devant coïncider avec D, on aura bien arc A′C = arc A′B.

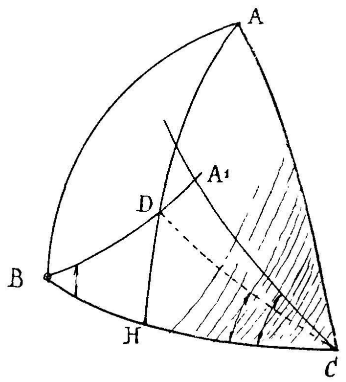


Fig. 61.

Ainsi, un triangle sphérique, qui a deux angles égaux, aura aussi égaux les côtés opposés à ces angles.

3. — *Triangle sphérique propre qui a deux angles inégaux.* — Théorème. — *Dans un pareil triangle sphérique les côtés opposés à ces angles sont inégaux et dans le même ordre de taille.*

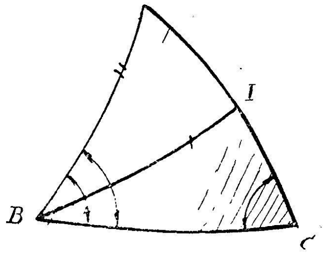


Fig. 62.

Du sommet B du plus grand des deux angles (fig. 62) traçons l'arc de grand cercle BI qui, *dans* le triangle fait avec le côté BC commun aux deux angles un angle égal au plus petit des deux angles comparés dont le sommet est en C, cet arc *coupe* le côté AC en I ; le triangle équiangle IBC est alors isocèle et

$$\text{arc BI} = \text{arc IC}.$$

Or le triangle propre AIB donne :

$$\text{arc AB} < \text{arc AI} + \text{arc IB}$$

c'est-à-dire

$$\text{arc AB} < \text{arc AI} + \text{arc IC}$$

ou enfin

$$\text{arc AB} < \text{arc AC}.$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

On va établir la *réciproque* de cette proposition.

4. — *Triangle sphérique qui a deux côtés inégaux.* — Soient (sans figure) $a$ et $b$ les côtés inégaux ; $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ les angles respectivement opposés à ces côtés ; je dis que le fait : $a < b$ va entraîner le fait : $\widehat{A} < \widehat{B}$.

En effet des trois seules hypothèses possibles

$$1^\circ\ \widehat{A} > \widehat{B}\ ; \quad 2^\circ\ \widehat{A} = \widehat{B}\ ; \quad 3^\circ\ \widehat{A} < B$$

la première entraînerait (V; II, 3) $a > b$ ; la seconde exigerait (V; II, 2) que $a = b$ ; la troisième hypothèse subsiste donc seule et la démonstration est achevée.

5. — *Comparaison de ces théorèmes avec les théorèmes analogues du plan.* — En comparant les propositions qui précèdent et leurs analogues dans le plan (Chapitre III) le lecteur aperçoit la raison des changements nécessaires dans les étapes des démonstrations. Nous avions, avec les propriétés admises pour la droite, adopté et justifié pour cette série de propositions le point de départ suivant :

L'angle *extérieur* d'un triangle dépasse l'un et l'autre des deux angles du triangle qui n'ont pas même sommet que l'angle extérieur considéré.

Or cette proposition, on le voit aisément, *est fausse* pour les triangles sphériques ; exemple : ceux-ci peuvent avoir deux angles droits et un troisième angle supérieur à 1 droit.

En revanche nous possédions pour les triangles sphériques, images des trièdres, cette proposition qu'un côté du triangle est plus petit que la somme des deux autres.

De là ce changement dans la marche suivie; les angles sphériques ne sont plus superposables sur eux mêmes par retournement, et les raisonnements, qui pour le plan employaient le retournement, sont remplacés sur la sphère par les raisonnements qui invoquent les propriétés de la symétrie.

Ces remarques se vérifieront encore dans la théorie des perpendiculaires et des obliques sphériques que nous allons résumer succinctement.

## III. — **Perpendiculaires et obliques sur la sphère.**

Etant donnés sur la sphère (sans figure) un arc de grand cercle XY et un point A hors de cet arc, nous distinguerons deux cas : 1° ou bien A est un pôle de XY: 2° ou bien A est distinct des pôles de XY ; en nous rappelant les propriétés de la projection d'une droite sur un plan (chapitre II) nous voyons que dans le cas 1° tous les arcs de grand cercle joignant A aux divers points de XY sont égaux à un quadrant et tous perpendiculaires à XY ; au contraire dans le second cas on obtient l'arc perpendiculaire à XY et passant par A en joignant ce point à l'un ou l'autre pôle de XY.

L'arc ainsi obtenu *est unique* mais il a deux pieds : (fig. 63) le pied H ou le pied K; l'un d'eux H est à une distance de A moindre qu'un quadrant. Nous allons voir que cette distance AH est la plus courte distance sphérique de A aux divers points de XY ; comparons l'arc AH à l'arc *oblique* AM prolongeons AH d'une longueur égale au-dessus de XY et joignons A′ et M par un grand arc; le triangle AA′M est un triangle propre et

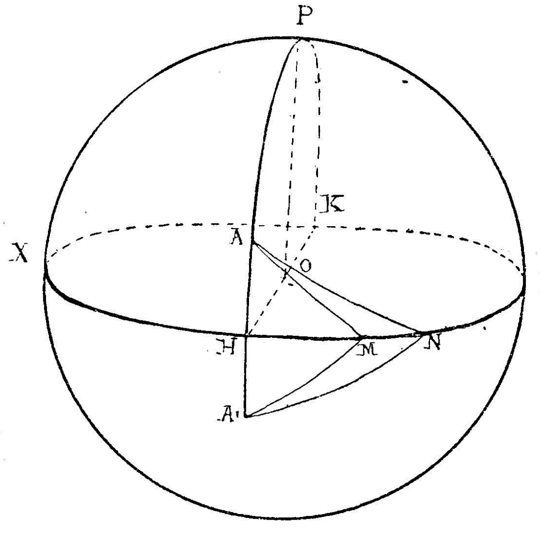


Fig. 63.

$$\text{arc AA}' < \text{arc AM} + \text{arc A}'\text{M}$$

les arcs AM et A′M sont égaux comme symétriques par rapport au plan du cercle XY, donc

$$2 \text{ arc AH} < 2 \text{ arc AM}$$

ou

$$\text{arc AH} < \text{arc AM} .$$

Soient (fig. 63) AM et AN deux obliques aboutissant du même côté de H et telles que HM et HN soient tous deux moindres que 2 *quadrants*. Soit alors arc HM $<$ arc HN.