III. — Situations mutuelles des droites et des circonférences d'un même plan ; situations des plans et d'une sphère.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

égalité CA > CB, nous tirons : angle B > Angle A ; et comme l'angle B est droit, l'angle A est bien aigu.

III. — Situations mutuelles des droites et des circonférences d'un même plan ; situations des plans et d'une sphère.

En raisonnant exactement comme pour la sphère on verra que *dans un même plan :*

1° Si une droite DD′ (fig. 38) et une circonférence de centre O ont en commun un point M, distinct du pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite DD′, elles auront encore en commun, un autre point M′, mais nul autre point commun hors des deux précédents et de plus le point H sera le milieu du segment MM′.

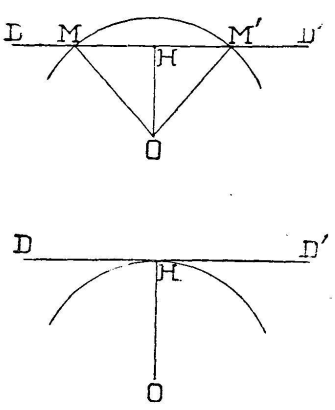

Fig. 38.

2° Si une droite DD′ et une circonférence de centre O ont en commun un point H qui est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite, elles n'ont aucun autre point commun. On dit alors que la droite est tangente à la circonférence.

Remarque. — Désignons par d la distance du centre O à la droite DD′ c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire abaissée sur la droite et soit R la longueur du rayon de la circonférence. Trois cas sont à distinguer, suivant qu'auront lieu l'une ou l'autre des circonstances suivantes, qui s'excluent mutuellement :

1° $d < R$. 2° $d = R$. 3° $d > R$.

On voit de suite que le cas $d > R$ empêche la droite et la circonférence de se couper ; que le cas de $d = R$ fait la droite et la circonférence mutuellement tangentes.

Il nous reste à établir que dans le cas de $d < R$ la droite et la circonférence se coupent toujours.

Rappelons-nous à cet effet que les longueurs a, b, c de trois côtés d'un triangle sont assujetties aux inégalités :

$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b,$

d'où on conclut aussi, si par exemple $a > b$, $c > a - b$.

Ainsi un côté d'un triangle est compris entre la somme et la différence de deux autres côtés ; soit alors (fig. 39) H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur DD′. Portons sur DD′ et à partir de H une longueur HK égale à 2R et joignons O à K par une droite. Nous aurons OK > KH — HO, ou OK > R + (R — HO), donc OK est > R.

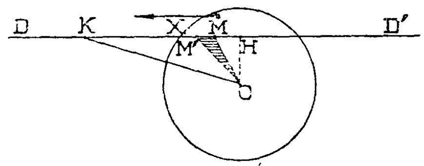

Fig. 39.

Imaginons alors un point M, mobile de H vers K d'une manière continue, soit M′ une position du point voyageur, voisine de la position M.

Le triangle OM′M nous donne $OM - MM' < OM' < OM + MM'$; si donc le chemin MM′ est pris suffisamment petit ; la variation de la longueur OM sera aussi petite qu'on le voudra ; en d'autres termes la longueur OM est *une fonction continue* de la longueur MH ; or quand le point voyageur va de la position H à la position K, c'est-à-dire quand la longueur variable MH varie de zéro à HK la longueur variable OM a varié depuis la valeur OH moindre que R jusqu'à la valeur OK supérieure à R, d'ailleurs OM est allé toujours en augmentant, *donc la valeur variable de* OM *a* PASSÉ UNE ET UNE SEULE FOIS *par la valeur fixe* R, c'est-à-dire que le point voyageur a passé par une position X appartenant à la fois à la droite et à la circonférence.

Le principe que nous admettons ici est le suivant : Si une quantité y varie d'une *manière continue* en même temps qu'une quantité x dont la première dépend, et si, pour deux valeurs de x distinctes, (savoir pour $x = a$ et pour $x = b$) y prend deux valeurs distinctes savoir c et d, il existera au moins une valeur de x comprise entre a et b pour laquelle la fonction y prendra une valeur m quelconque mais comprise entre c et d. La démonstration de ce principe appartient à l'enseignement de l'algèbre et nous ne la reproduirons pas ici.

Remarque. — Cette discussion peut être appliquée à la sphère; elle nous montre que tout plan dont la distance au centre de la sphère est moindre que le rayon de cette sphère coupera effectivement la sphère suivant une circonférence.

IV. — Situations mutuelles de deux circonférences d'un plan.

L'étude rigoureuse des situations mutuelles de deux circonférences deviendra très facile si nous nous reportons encore au principe de continuité, mais nous aurons quelques faits préliminaires à établir.

Premier fait préliminaire. Si (fig. 40), deux droites OA et OB sont obliques sur une même droite AB mais d'un même côté de la perpendiculaire OH tirée de O sur AB, la bissectrice OC de l'angle AOB partage le segment AB en deux portions inégales, la portion CB qui est la plus voisine du point H est la plus petite des deux portions. Le triangle ABO dont l'angle en B

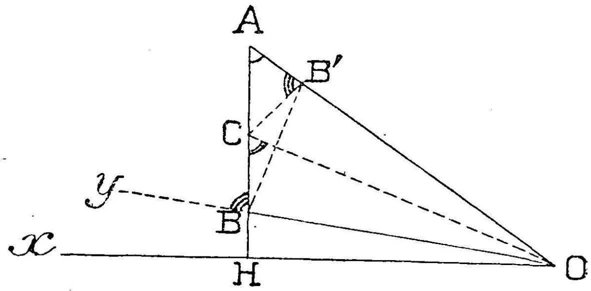

Fig. 40.