CHAPITRE III Encore quelques propriétés du triangle. Angles trièdres et polyèdres. Le théorème du parapluie.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

nométrie est quelquefois trop développée. Dans plusieurs gymnases on néglige par exemple l'étude du prismatoïde, dont la formule du volume donne lieu à des généralisations remarquables. D'autre part il serait désirable de donner une courte étude synthétique des sections coniques, en partant du cône de révolution, en la plaçant avant l'étude analytique.

Quant à la préparation du corps enseignant, elle varie d'un canton à un autre; il en est de même des exigences de l'Etat, qui ne sont pas toujours assez élevées. L'organisation des études pour les candidats à l'enseignement est encore insuffisante aussi bien dans les universités qu'à l'Ecole polytechnique fédérale. Sous ce rapport il conviendrait d'examiner avec soin les conseils que donne le rapport[1] de MM. Klein et Gutzmer (Dresde 1907).

Cette diversité dans la préparation est peut-être même une force stimulante, car le corps enseignant, dans son ensemble, est à la hauteur de sa mission. Il a conscience que l'enseignement mathématique est perfectible. Aussi est-ce avec le plus grand intérêt qu'il suit les discussions et les efforts qui se font dans les pays voisins.

H. Fehr.

LE PREMIER LIVRE DE LA GÉOMÉTRIE NATURELLE[2]

CHAPITRE III

Encore quelques propriétés du triangle. Angles trièdres et polyèdres. Le théorème du parapluie.

Comparaison des longueurs droites. (Sans figure.) — Deux droites étant données, si on porte l'une sur le prolongement de l'autre et bout à bout, la nouvelle droite formée sera dite *la somme* des deux premières ; des deux modes de superposition des droites égales il résulte que la somme de deux droites est indépendante de l'ordre dans lequel elles ont été ajoutées l'une à l'autre ; on définira de même la somme de plusieurs droites et cette somme jouira des propriétés suivantes : 1° la somme est indépendante de l'ordre de *jonction* des parties ; 2° dans la somme de plusieurs droites, un ensemble quelconque des portions de la somme peut être remplacé par leur somme partielle.

---

[1] Reproduit dans l'*Enseign. math.* du 15 janv. 1908; p. 5-49.

[2] Voir *L'Enseign. math.* du 15 mai, 1908; p. 185-207.

On résume les propriétés qui précèdent en disant que l'addition des droites est une opération *commutative* et *associative*.

Signes d'égalité et d'inégalité. — Plusieurs barres étant rangées par ordre de taille croissante, de taille égale, ou de taille décroissante, donnent à l'œil les trois groupements suivants (Fig. 20) : de là est né l'emploi des signes d'inégalité et d'égalité : $a < b$, $a = b$, $a > b$, qui signifient respectivement :

Fig. 20.

a plus petit que b, a égale b, a plus grand que b.

Quelques remarques évidentes. 1° Dire qu'une droite a est plus grande qu'une autre b, ou supérieure à une autre b, veut dire que la droite $a =$ la droite b *augmentée* de quelque chose ; l'addition étant une opération commutative, il résulte de la remarque précédente que si l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} a < b \\ a' < b' \end{array} \right. \quad \text{on devra aussi avoir : } a + a' < b + b' .$$

2° Quand on ajoute une droite A un certain nombre de fois à elle-même, si par exemple on forme la droite égale à A + A + A, la nouvelle droite est dite égale à l'ancienne multipliée par 3 ; en général si m est un nombre entier, et si on forme la droite égale à A + A ... + A, réunion de m droites égales à A, on dit qu'on a formé la droite A *multipliée* par m, ce que l'on écrit $A . m$.

3° L'addition étant une opération commutative et associative on voit immédiatement que $(A + B + C + D) . m = (A . m) + (B . m) + (C . m) + (D . m)$.

4° On admet comme évident qu'une droite A étant donnée et un nombre entier m étant également donné, il existe toujours une droite X (qui multipliée par m reproduira A ; on appelle cette droite la $m^{ème}$ partie de A ; on dit encore que X dérive de A par l'emploi *du nombre sectionnaire* $\frac{1}{m}$.

Ainsi, *par définition*, les égalités :

$$A = X . m , \quad \text{ou} \quad X = A . \frac{1}{m} ; \text{ sont complètement équivalentes.}$$

5° On définira de même *le produit* d'une droite par plusieurs nombres entiers ou sectionnaires envisagés dans l'ordre de l'écriture. Exemple : $A . 3 . \frac{1}{4} . 5$ signifiera : longueur droite A que l'on multiplie par 3 : résultat dont on prend le quart : résultat que l'on multiplie par 5 ; et l'on démontrera sans peine que l'ordre des facteurs entiers ou sectionnaires n'exerce aucune influence sur le résultat.

6° Si p désigne un nombre entier ou sectionnaire on a :

$$(A + B + C) \cdot p = (A \cdot p) + (B \cdot p) + C \cdot p)$$

et par conséquent aussi, si l'on a : $A \cdot p > A' \cdot p$ on peut conclure : $A > A'$.

Les principes qui précèdent contiennent toute l'arithmétique et toute l'algèbre.

I. — Angle d'un triangle.

Deux demi-droites OX et OY peuvent former (Fig. 21) *soit un angle creux, soit un angle pointu, l'un supérieur, l'autre inférieur à 2 droits.*

Lorsqu'on admet, comme nous l'avons admis jusqu'ici, que *par deux points absolument quelconques* ne passe jamais qu'une seule droite on peut affirmer que tout angle engagé dans un triangle est un angle pointu. Démontrons le :

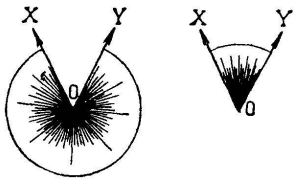


Fig. 21.

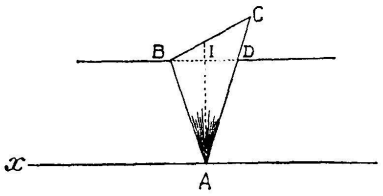


Fig. 22.

Soit $\widehat{BAC}$ (Fig. 22) un angle engagé dans un triangle BAC, sur le plus grand des deux côtés de cet angle prenons une *longueur* égale à celle du plus petit soit D le point ainsi obtenu sur AC, nous obtenons un triangle isocèle BDA ; soit I le milieu de BD, joignons I à A, nous obtenons une droite perpendiculaire à BD, menons A perpendiculaire à AI cette droite ne saurait pénétrer dans l'intérieur du triangle BDA, car elle couperait BD, ce qui n'est pas possible, donc l'angle $\widehat{BAC}$ engagé dans le triangle est formé de droites toutes situées d'un même côté de AX, donc l'angle considéré ne peut atteindre 2 droits.

II. — Propriété de l'angle extérieur d'un triangle.

Définition. — On appelle angle extérieur d'un triangle, l'angle formé en un sommet par l'un des côtés du triangle et par le prolongement de l'autre. (C'est aussi un angle pointu).

THÉORÈME. — *L'angle extérieur d'un triangle est supérieur à tout angle intérieur qui n'a pas même sommet que lui.*

Faisons voir par exemple que : (Fig. 23) $\widehat{XAC} > \widehat{ACB}$. Joignons le troisième sommet B au milieu D de AC et prolongeons BD d'une longueur égale en DB′, joignons B′ à A, la droite AB′ sera située dans l'angle extérieur $\widehat{DAX}$; les angles opposés par le sommet BDC et ADB′ valent chacun 2 droits diminués de l'angle $\widehat{ADB}$ ils sont donc égaux ; alors les deux triangles ADB′ et BDC ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux ; et par suite les angles opposés respectivement à DB′ et BD côtés égaux, seront égaux ; ainsi $\widehat{B'AD} = \widehat{DCB}$; mais B′AD est portion de l'angle extérieur $\widehat{CAX}$, donc enfin on a bien :

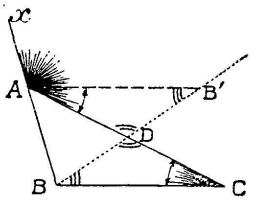


Fig. 23.

$$\widehat{XAC} > \widehat{ACB}.$$

III. — Comparaisons simultanées de 2 côtés d'un triangle et de leurs angles opposés.

THÉORÈME. — *Si deux côtés d'un triangle sont inégaux les angles opposés à ces côtés sont inégaux dans le même ordre de taille.*

Comparons (Fig. 24) les deux côtés AB et AC du triangle ABC ; soit le côté AC > AB. Prenons sur AC un segment AD = AB et joignons BD ; l'angle $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$ (puisque le triangle ABD à deux côtés égaux) ; l'angle $\widehat{ADB}$ extérieur est plus grand que l'angle $\widehat{DCB}$ du triangle partiel BDC ; l'angle $\widehat{ABD}$ portion de l'angle $\widehat{ABC}$ est donc plus grand que l'angle ACB, donc à plus forte raison l'angle total ABC dépassera-t-il ACB.

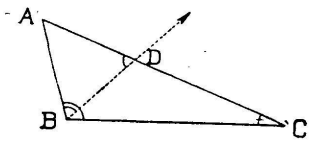


Fig. 24.

THÉORÈME (réciproque du précédent). — *Si deux angles* d'un triangle sont inégaux, les côtés opposés à ces *angles* sont inégaux et dans le même ordre de taille.

Soient (sans figure) $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ deux angles d'un triangle et soient: a et b les côtés respectivement opposés à ces angles; je dis que l'inégalité $\widehat{A} > \widehat{B}$ entraînera comme conséquence l'inégalité $a > b$.

En effet, en comparant a et b, trois cas peuvent seuls se présenter; ou bien 1° : $a < b$, ou bien 2° : $a = b$; ou bien 3° : $a > b$; or le cas de $a < b$ entraînerait, d'après le théorème précédent $A < B$ et le cas de $a = b$ entraînerait comme nous l'avons vu, au début de ces leçons $A = B$. Ces deux suppositions provisoires $a < b$ et $a = b$ entraîneraient donc des conséquences contradictoires avec l'hypothèse; on aura donc bien $a > b$ tout comme on avait d'abord $A > B$.

Remarque. — Ce genre de raisonnement est ce qu'on nomme un raisonnement *par l'absurde*.

IV. — Un côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres.

Il n'y a lieu à démonstration que si le côté considéré n'est pas le plus petit de tous, soit alors (Fig. 25) $AB > AC$. Prolongeons AC d'une longueur CD, de manière que $AD = AB$, joignons BD; envisageons d'une part le triangle isocèle ABD et d'autre part le triangle CBD. Dans ce dernier, l'angle CBD portion de ABD sera plus petit que celui-ci ou que son égal CDB; on a donc un triangle CBD dans lequel $\widehat{CDB} > \widehat{CBD}$; on peut donc affirmer, d'après le théorème précédent, que $CD < CB$; ABAD se composant de AC et de CD sera donc moindre que $AC + CB$.

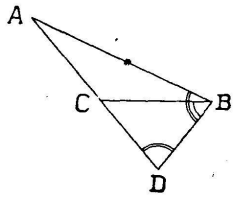


Fig. 25.

V. — Comparaison de deux triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant deux angles inégaux.

Théorème. — *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant un angle inégal, les côtés opposés à cet angle dans les deux triangles seront inégaux et dans le même ordre de taille.*

Portons (Fig. 26) le triangle A′B′C′ vers le triangle ABC, de manière à juxtaposer deux côtés égaux A′B′ sur AB et à placer les deux triangles dans une même région de leur plan commun, par rapport à ce côté coïncidant ; soit ABD la nouvelle venue du triangle A′B′C′, soit AX la bissectrice de l'angle formé par les deux autres côtés après ce transport.

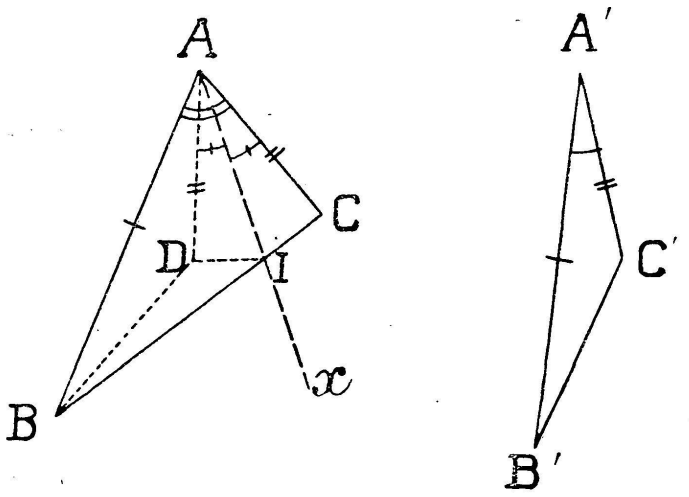


Fig. 26.

Cette bissectrice intérieure au plus grand angle BAC va couper le côté BC en I, joignons ID ; nous formons ainsi deux triangles ADI, AIC, égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, puis de l'égalité de ces triangles nous concluons DI = IC.

D'autre part, dans le triangle BDI nous avons, si D n'est pas sur BI,

$$BD < DI + IB \quad \text{ou} \quad BD < BI + IC \quad \text{ou} \quad BC.$$

Si D était sur BI, il serait forcément entre B et I et on aurait BD = BI — ID et à plus forte raison BD < BI + ID.

Théorème (réciproque du précédent). — *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, mais si leurs troisième côtés sont inégaux, les angles opposés à ces côtés seront aussi inégaux et dans le même ordre de taille.*

Nous démontrerons cette réciproque par la réduction à l'absurde ; soient : b, c, a, les côtés du premier triangle, b', c', a', les côtés du second ; soient A et A′ les angles de ces triangles respectivement opposés aux côtés a et a'.

Nous supposons donnés les renseignements suivants :

$$b = b' \quad c = c' \quad a < a' \ldots \text{(hypothèses données)}$$

voulant comparer les angles A et A′, nous ne pouvons que faire les suppositions suivantes :

1° A > A′ ; 2° A = A′ ; 3° A < A′ ; (hypothèses provisoires).

Or, d'après le théorème direct la supposition : $A > A'$ entraînerait : $a > a'$, ce qui n'est pas ; la supposition $A = A'$ entraînerait : $a = a'$, ce qui n'est pas non plus ; la seule supposition qui reste donc possible est : $A < A'$.

VI. — Définition et propriétés de l'angle trièdre.

On appelle angle *trièdre* la figure 27 formée par 3 demi-droites et par les trames angulaires qui les réunissent deux à deux.

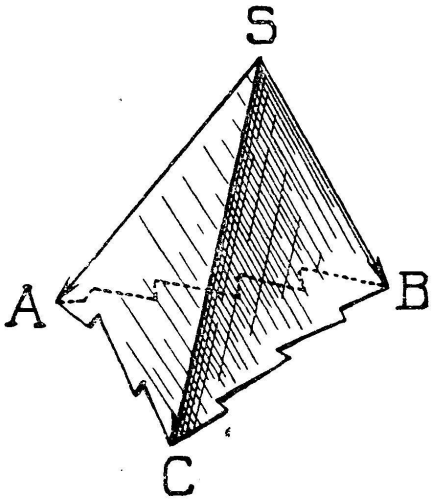


Fig. 27.

Ces trames angulaires portent encore le nom de *faces* du trièdre, leurs intersections ou les demi-droites déjà considérées se nomment les *arêtes* du trièdre.

Deux faces forment sur leur arête commune un angle *dièdre* que l'on nomme : un dièdre du trièdre. Le trièdre, sorte de capuchon, n'est pas une figure fermée ; mais un angle trièdre présente néanmoins certaines analogies avec un triangle ; nous allons par exemple démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Dans tout angle trièdre une face est plus petite que la somme des deux autres.*

Il n'y a lieu à démonstration que pour la face qui n'est pas la plus petite ; dans le plan de cette face qui prolonge le triangle ASB (Fig. 28) reproduisons donc un angle égal à la face adjacente plus petite, à partir de l'arête commune aux deux faces et dans une portion de la plus grande des deux faces ; nous obtenons ainsi l'angle ASD portion de ASB et reproduction de la face ASX ; sur l'arête SX prenons une longueur $SC = SD$.

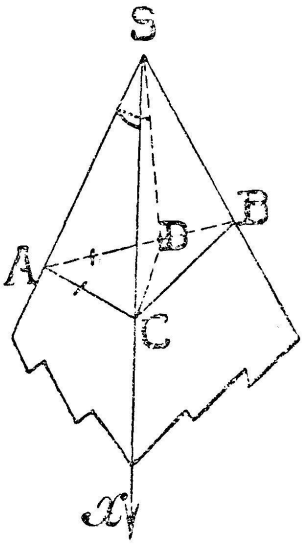


Fig. 28.

Menons CA, CB, CD ; grâce à notre choix des points C et D, les deux triangles ASD et ASC,

déjà réunis par le côté commun SA seront égaux, et leur égalité nous apprendra ensuite que AD = AC ; d'autre part le triangle ABC nous donne

$$AB = AD + DB < AC + CB$$

et comme AD = AC, nous concluons

$$DB < CB .$$

Mais alors les deux triangles CSD et DSB qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, ont leurs troisièmes côtés inégaux dans un ordre de taille que nous connaissons ; donc, d'après le théorème précédent, nous concluons :

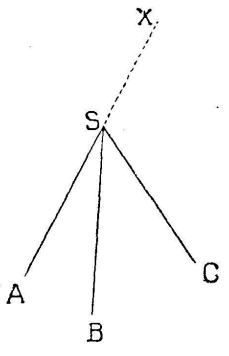
$$\widehat{DSB} < \widehat{CSB} ,$$

ainsi, quand dans la plus grande face on a enlevé une portion égale à une face voisine on trouve un résidu plus petit que l'autre face voisine ; c'est donc que la première face était plus petite que la somme des deux autres.

VII. — Théorème du parapluie.

Théorème. — *La somme des faces d'un trièdre est moindre que 4 droits.*

Soit (Fig. 29) un trièdre de sommet S et soient SA, SB, SC ses 3 arêtes.



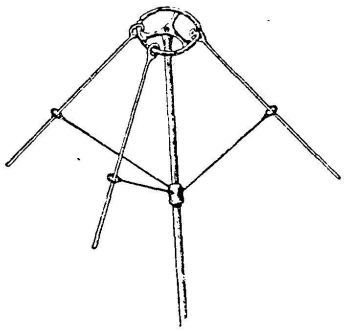


Fig. 29.

En prolongeant l'arête SA en SX nous formons un autre trièdre d'arêtes SB, SC, SX. Dès lors, en appliquant le théorème précédent au nouveau trièdre, et en remarquant que deux des faces du nouveau trièdre sont des suppléments de faces du premier trièdre, nous aurons :

$$\widehat{BSC} < \widehat{BSX} + \widehat{CSX} ,$$

ou :

$$\widehat{BSC} < 2^{0} - \widehat{ASB} + 2^{0} - \widehat{ASC} ,$$

d'où on conclut immédiatement :

$$\widehat{ASB} + \widehat{ASC} + \widehat{BSC} < 4^{\text{droits}} .$$

Remarque— Concevons trois tiges rectilignes, (Fig. 27) appuyées comme les baleines d'un parapluie sur un cercle perpendiculaire à un axe et soutenues par trois autres tiges égales qui s'appuient à leur tour sur l'axe par l'intermédiaire d'une glissière qui peut s'élever sur cet axe.

Cette figure représente la membrure d'un parapluie rudimentaire, les trois tiges analogues aux baleines du parapluie forment par leurs axes un trièdre dont les faces augmentent quand le parapluie s'ouvre et diminuent quand le parapluie se ferme. Quand le parapluie s'est ouvert jusqu'à ce que les faces soient dans un même plan, les trois faces forment trois angles d'un plan, contigus et réunis autour d'un point sur trois droites, ces trois angles ont une somme égale à quatre droits.

Avant que le parapluie ne fût ouvert, la somme des trois faces du trièdre mobile était moindre que quatre droits ; comme désignation mnémonique l'énoncé du théorème précédent peut être retenu sous le nom de théorème du parapluie.

VIII. — **Autre remarque.**

Cette comparaison nous suggère une nouvelle démonstration du théorème. Prenons, (Fig. 30) sur les trois arêtes, des longueurs égales SA = SB = SC.

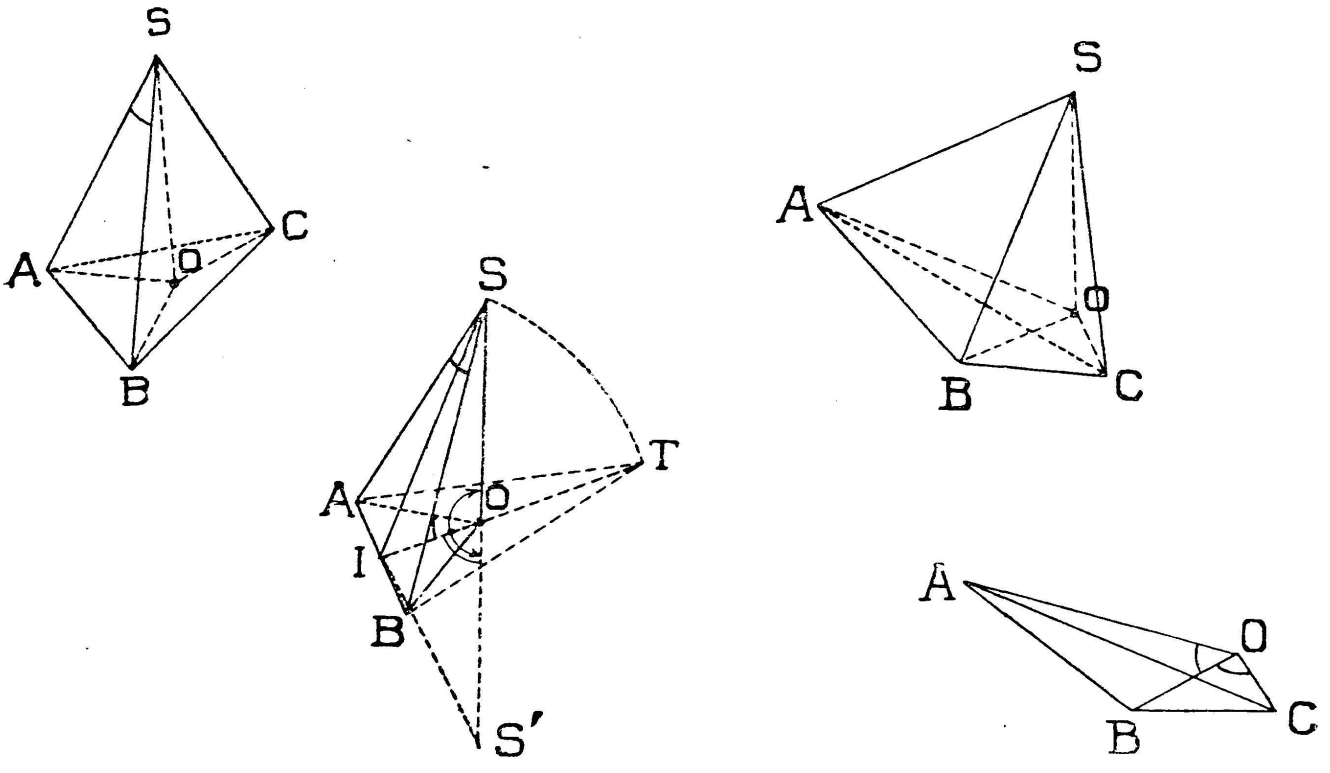


Fig. 30.

Et sur le plan déterminé par les trois points ABC abaissons une perpendiculaire SO, démontrons que l'angle ASB est plus petit que sa projection AOB. Soit I le milieu de AB.

Joignons I à O et à S par deux droites. SI étant perpendiculaire à AB, OI l'est aussi; d'autre part, prolongeons SO d'une quantité égale en OS′ au-dessous du plan AOB ; si l'on rabattait la figure SIO dans son plan autour de IO, S se rabattrait en S′ d'où on conclut SI = S′I, or dans le triangle SS′I on a :

$$SS' < IS + IS' \quad \text{ou} \quad 2SO < 2SI \quad \text{d'où} \quad SO < SI ;$$

la perpendiculaire SO est moindre que l'oblique SI ; on montrerait de même que IO < IS, on conclut de là que si on rabat la distance SI sur IO le point S se rabattra en T, au-delà de O.

L'angle $\widehat{AOI}$ est donc un angle extérieur du triangle AOT ; on conclut de là

$$\widehat{AOI} > \widehat{ATI} \quad \text{ou} \quad 2\widehat{AOI} > 2\widehat{ATI} \quad \text{ou} \quad AOB > ATB$$

et comme ATB est la reproduction par rabattement de l'angle ASB on conclut AOB > ASB.

Dès lors, en revenant aux figures du trièdre dont le sommet est projeté en O sur le plan ABC, la somme des trois faces du trièdre est plus petite que la somme de leurs projections sur le plan ABC.

Dès lors si le point O est à l'intérieur du triangle la somme des projections des angles est précisément quatre droits.

Si au contraire le point O est hors du triangle ABC, chacun des trois angles en O reste cependant un angle pointu et l'un d'eux contient les deux autres, AOC par exemple contient AOB et BOC ; la somme des trois angles en O est donc moindre que deux fois l'angle AOC et comme l'angle AOC est moindre que deux droits la somme des triangles en O est ici moindre que quatre droits.

Donc dans tous les cas la somme des faces du trièdre est moindre que quatre droits.

IX. — Angles polyèdres. Théorème du parapluie, applicable aux angles polyèdres convexes.

On appelle *angle polyèdre* la figure 31 formée par plusieurs demi-droites envisagées dans un certain ordre ; les *faces* de l'angle polyèdre sont les trames angulaires formées par les divers groupes de deux demi-droites consécutives.

Les demi-droites sont les *arêtes* de l'angle polyèdre.

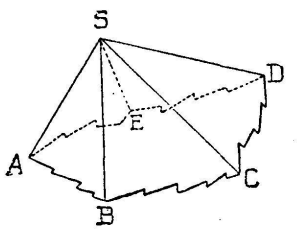


Fig. 31.

Un angle polyèdre est dit *convexe* si toutes ses arêtes demeurent d'un même côté par rapport au plan de chacune de ses faces; cette définition est satisfaite d'elle-même pour un angle trièdre.

Nous allons montrer que le théorème du parapluie s'étend aux angles polyèdres convexes ; il suffit pour le voir nettement de faire la *remarque suivante :*

Etant donnés (Fig. 32) deux demi-plans T_1 et T_2 comptés à partir de leurs intersections respectives OY et OZ avec un même

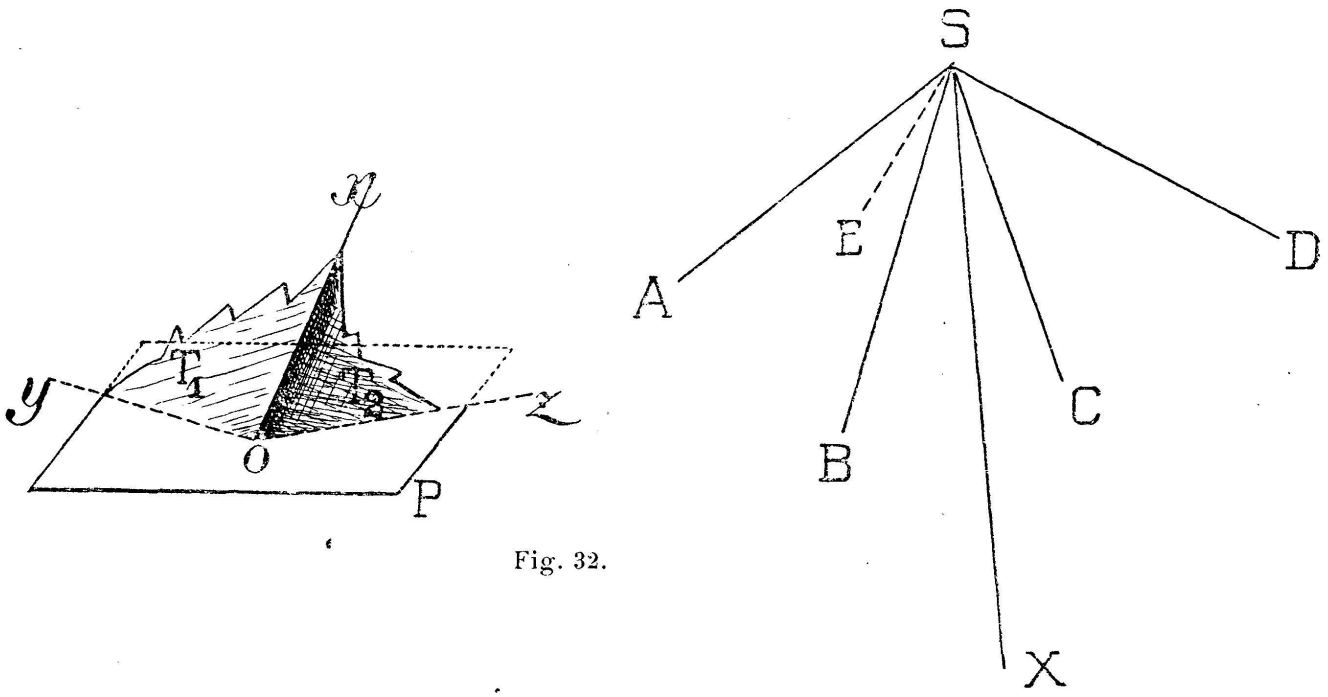


Fig. 32.

plan P, et tous deux comptés d'un même côté de P, les deux demi-plans auront toujours une demi-droite commune, située de ce même côté.

Considérons dès lors un angle polyèdre convexe et trois faces consécutives ; envisageons la face intermédiaire BSC, les prolongements des deux autres à partir des arêtes SB et SC se couperont en dehors des angles faces extrêmes suivant une demi-droite SX, si on remplace alors dans l'angle polyèdre les arêtes SB et SC par l'arête unique SX on forme un nouvel angle polyèdre convexe comme le premier mais ayant une arête de moins. En répétant cette réduction un assez grand nombre de fois on parviendra évidemment à un trièdre ; d'ailleurs par cette réduction, si le nombre des faces diminue, en revanche la somme de leurs *valeurs augmente*. Cela tient à ce que dans l'angle trièdre, dont les arêtes sont SB, SX, SC, la face BSC est moindre que la somme des faces BSX et XSC.

Ainsi par la réduction considérée, la somme des angles des faces augmente plus qu'elle ne diminue par la suppression d'une face. La somme des faces augmente donc jusqu'à l'obtention du

trièdre, or ainsi augmentée elle est moindre que quatre droits, à plus forte raison la somme des faces de l'angle polyèdre primitif était-elle donc plus petite que quatre droits.

CHAPITRE IV

Les cercles du plan et de la sphère. Analogies du plan et de la sphère.

I.

Définitions. Considérons (sans figure), les points N, R, M de l'espace qui sont à une *distance* donnée d'un même point O également donné, tous ces points en nombre infini forment ce que l'on appelle une *surface sphérique ;* le point O est le centre de la sphère, les divers segments OM, OR, ON... sont des *rayons* de la sphère.

Ligne d'intersection d'une surface sphérique et d'un plan. Considérons (fig. 33) une surface sphérique de centre O et un plan P; soit M un point appartenant à cette surface sphérique et au plan P ; soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan P, joignons les points M et H par une droite, celle-ci sera perpendiculaire à HO; donnons à la droite MH envisagée comme une barre rigide liée à l'axe HO envisagé comme un pivot rigide, un mouvement de révolution autour de l'axe HO; dans ce mouvement le point M, nous l'avons vu, ne quitte pas le plan P, il ne quitte pas non plus la surface sphérique puisque pendant ce mouvement la distance OM ne varie pas : *il existe donc une ligne commune au plan P et à la surface sphérique* et cette ligne peut-être *définie dans le plan P l'ensemble des points de P dont chacun est à une distance fixe du point H,* cette ligne est appelée *circonférence de cercle.* H est son centre. Ainsi une surface sphérique et un plan P ont une ligne commune qui est une circonférence de cercle.

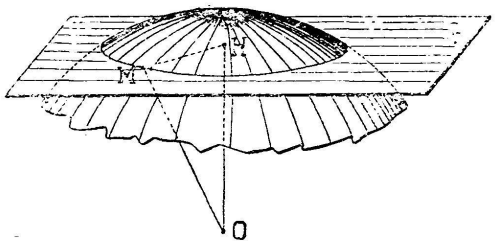


Fig. 33.