UN NOUVEAU THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

Autor(en): **Laisant, C.-A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10972

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

énoncé repose d'ailleurs sur un principe très simple, immédiatement compréhensible même aux élèves qui étudient la géométrie élémentaire seulement; mais, si l'on veut exposer ce raisonnement complètement, on est nécessairement conduit à ce qu'il m'a semblé à des longueurs devant lesquelles j'ai reculé dans ma thèse.

En tous cas il n'y a aucune difficulté à examiner le cas où l'arc le long duquel on soude les deux surfaces composantes est plan ; la démonstration devient particulièrement simple lorsque les deux surfaces partielles sont tout entières d'un même côté du plan considéré (voir le raisonnement de la fin du paragraphe 4) ou lorsque les deux surfaces sont tout entières de côtés différents de ce plan.

H. LEBESGUE (Poitiers).

UN NOUVEAU THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

---

1. — Cette qualification de « nouveau », que nous donnons au théorème en question, paraît véritablement justifiée, à la suite de recherches assez attentives et multipliées faites par plusieurs personnes. En raison même de l'extrême simplicité du sujet, on s'expliquerait difficilement un silence complet, aussi bien dans les traités classiques que dans les recueils d'exercices les plus répandus.

L'un des côtés originaux de cette proposition, c'est qu'elle a été découverte et démontrée, sans avoir été énoncée ; tandis que celui qui l'a énoncée est le premier à déclarer qu'il n'en est pas l'inventeur.

A propos des tables de numération inverses, dans son *Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques* (p. 29-31) M. Gabriel Arnoux a en effet établi implicitement le théorème

en question, par une constatation faite sur les figures, laquelle est une véritable démonstration. En examinant cette partie intéressante du livre dont il s'agit, M. Gaston Tarry, dont j'avais attiré l'attention sur ce point, a formulé l'énoncé, et en a déduit certaines applications qu'il m'a fait connaître, soit par correspondance, soit dans d'assez nombreuses conversations. Nous croyons, lui et moi, que le théorème mérite de devenir classique, qu'il fait ressortir les avantages de la méthode graphique en matière d'invention et qu'il est de toute équité de lui attribuer le nom du créateur de cette méthode.

2. — Ces explications préliminaires produites, arrivons maintenant à l'énoncé.

THÉORÈME D'ARNOUX. — *Soit* $M = m_1 m_2 \ldots m_n$ *un nombre composé, dont les facteurs* $m_1, m_2, \ldots m_n$ *sont premiers entre eux deux à deux ; appelons* $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *les quotients* $\frac{M}{m_1} = m_2 m_3 \ldots m_n, \ldots\ldots$ *Si* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *sont des nombres tels que l'on ait*

$$a_1\mu_1 = \text{mult. } m_1 + r, \qquad a_2\mu_2 = \text{mult. } m_2 + r, \ldots a_n\mu_n = \text{mult. } m_n + r,$$

il s'ensuit qu'on aura aussi

$$a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots\ldots + a_n\mu_n = \text{mult. } M + r.$$

La démonstration est d'une extrême facilité. Il suffit en effet d'établir que $a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots\ldots + a_n\mu_n - r$ est un multiple de M. Or cette expression peut s'écrire

$$(a_1\mu_1 - r) + a_2\mu_2 + \ldots\ldots + a_n\mu_n$$

Le premier terme $a_1\mu_1 - r$, en vertu de l'énoncé, est divisible par m_1 ; chacun des termes $\mu_2, \mu_3, \ldots\ldots \mu_n$, par sa définition même, est aussi divisible par m_1. Donc l'expression considérée

$$a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n\mu_n - r$$

est divisible par m_1. On établirait de même qu'elle est divisible par $m_2, m_3, \ldots m_n$; elle l'est donc par le produit

$m_1 m_2 \ldots m_n = \mathrm{M}$, puisque ces facteurs m_1, m_2, $\ldots m_n$ sont premiers entre eux deux à deux, ce qui démontre le théorème d'Arnoux.

3. — Quelques observations supplémentaires peuvent trouver place. Reprenons les relations figurant dans l'énoncé, mais en mettant en évidence les multiplicateurs b_1, b_2, .. b_n des facteurs m_1, m_2, $\ldots m_n$:

$$a_1 \mu_1 = b_1 m_1 + r, \qquad a_2 = \mu_2 b_2 m_2 + r, \ \ldots \qquad a_n \mu_n = b_n m_n + r .$$

En les ajoutant, on a

$$\Sigma a_i \mu_i = \Sigma b_i m_i + nr ;$$

et, en vertu du théorème d'Arnoux,

$$\Sigma a_i \mu_i = b\mathrm{M} + r,$$

Donc $$\Sigma b_i m_i = b\mathrm{M} - (n-1)\, r.$$

Cette remarque constitue en quelque sorte un corollaire.

Le multiplicateur b s'exprime par $\frac{\Sigma a_i \mu_i}{\mathrm{M}} - \frac{r}{\mathrm{M}}$, c'est-à-dire par

$$\frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} + \ldots - \frac{r}{\mathrm{M}}$$

Dire que cette expression se réduit à un nombre entier, c'est sous une forme nouvelle énoncer encore le théorème d'Arnoux. Ce nombre entier b a encore pour expression, d'après ce qui précède,

$$\frac{b_1}{\mu_1} + \frac{b_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{(n-1)\, r}{\mathrm{M}} .$$

4. — Si M est un produit de deux facteurs seulement, m_1, m_2, premiers entre eux, le théorème prend un caractère remarquablement simple. On a alors, $\mu_1 = m_2$, μ_2, $= m_1$, et

$$a_1 m_2 = b_1 m_1 + r, \ a_2 m_1 = b_2 m_2 + r, \ a_1 m_2 + a_2 m_1 = b m_1 m_2 + r.$$

En outre

$$b_1 m_1 + b_2 m_2 = b m_1 m_2 - r ;$$

et le nombre entier b s'exprime par

$$\frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} - \frac{r}{m_1 m_2} \quad \text{ou par} \quad \frac{b_1}{m_2} + \frac{b_2}{m_1} + \frac{r}{m_1 m_2}.$$

Enfin ce nombre, comme on le voit immédiatement, est égal à

$$\frac{a_1 + b_2}{m_1} \quad \text{ou à} \quad \frac{a_2 + b_1}{m_2}$$

Les vérifications numériques de ces diverses propriétés seront faciles sur un exemple numérique quelconque.

5. — Il est à noter, pour revenir au théorème lui-même, qu'on peut supposer $r = 1$, pour ainsi dire sans rien particulariser. En effet. si l'on a les relations $a_1\mu_1 = b_1 m_1 + 1, \ldots$ on en déduit $\Sigma a_1\mu_1 = b\mathrm{M} + 1$. Et il suffit de multiplier tous les a_i et tous les b_i par r, pour que 1 se trouve remplacé par r, en même temps que b l'est par br.

Le théorème est ainsi établi pour r quelconque, dès qu'il l'a été pour $r = 1$. Naturellement, on pourra ensuite, de $a_1 r$ et $b_1 r$, enlever m, autant de fois qu'on voudra, pour avoir les nouveaux multiplicateurs a'_1 et b'_1 ; et ainsi des autres.

6. — Parmi les applications possibles du théorème d'Arnoux, on peut signaler le problème que voici : une fraction irréductible étant donnée, dont le dénominateur est composé des facteurs $m_1, m_2 \ldots m_n$ premiers entre eux deux à deux, l'écrire sous la forme d'une somme de fractions dont les dénominateurs sont $m_1, m_2, \ldots$, somme augmentée ou diminuée d'un nombre entier.

Les considérations du n° 3 ci-dessus permettront d'avoir immédiatement la solution. En conservant les mêmes notations que plus haut, appelant $\frac{r}{\mathrm{M}}$ la fraction donnée, nous avons

$$\frac{r}{\mathrm{M}} = \frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} + \ldots + \frac{a_n}{m_n} - b.$$

Comme certaines des fractions $\frac{a_1}{m_1}$, $\frac{a_2}{m_2}$, ..., ou toutes, peuvent avoir des valeurs plus grandes que l'unité, on pourra faire

la somme des entiers qu'elles contiennent, laquelle ajoutée à $-b$ donnera un entier positif ou négatif.

On peut aussi mettre la fraction $\frac{(n-1)r}{M}$ sous la forme de la différence entre un nombre entier et une somme de fractions ayant pour dénominateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots$, en nous servant de la relation

$$\frac{(n-1)r}{M} = b - \left(\frac{b_1}{\mu_1} + \frac{b_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{b_n}{\mu_n}\right).$$

Nous engageons le lecteur à vérifier tout ceci sur des exemples numériques simples. Pour abréger, nous ne donnons pas ici ces exemples faciles. Qu'il nous suffise de remarquer que ces questions seront toujours ramenées à la résolution d'équations indéterminées de la forme $a_1\mu_1 = b_1 m_1 + r$, ou ce qui revient au même, de congruences $a_1\mu_1 \equiv r \pmod{m_1}$, où a_1, b_1 sont les inconnues.

7. — Les personnes qui ne connaîtraient pas l'ouvrage précité de M. Arnoux seront peut-être curieuses de savoir ce que sont ces tables de numération dont nous avons parlé au n° 1. Nous allons l'indiquer sur un exemple très simple, celui d'un produit $M = 28$ de deux facteurs 7 et 4 (en général m_1, m_2) premiers entre eux. En écrivant les 28 nombres, 0, 1, 2, ... 27, chacun d'eux, divisé par 7, donnerait un certain reste r_1, et divisé par 4, un certain reste r_2. En formant un tableau de trois colonnes (Nombres, r_1, r_2) on aurait une table de numération directe. La table de numération inverse a pour objet de trouver le nombre, inférieur à 28, qui correspond aux deux restes r_1, r_2, respectivement inférieurs à 7 et à 4. Voici cette table de numération inverse :

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	8	16	24	4	12	20
1	21	1	9	17	25	5	13
2	14	22	2	10	18	26	6
3	7	15	23	3	11	19	27

Pour savoir par exemple quel nombre, divisé par 7, donne pour reste 5 et, divisé par 4, donne pour reste 2, il suffit de prendre la colonne et la ligne marquées respectivement 5 et 2 ; à leur intersection, on trouve 26, qui est le nombre cherché.

La construction de cette table se fait en écrivant 0 dans la première case, à gauche en haut, et en écrivant tous les nombres 0, 1, 2, ... dans la ligne bissectrice de la verticale et de l'horizontale. Chaque fois qu'on sortirait du tableau de 28 cases, on y ramène le nombre à écrire en le plaçant dans la case homologue à celle qu'il occuperait, si la figure était indéfiniment reproduite sur toute l'étendue du plan.

Ces figures présentent de nombreuses propriétés sur lesquelles nous n'avons pas à insister ici. Pour un nombre M de la forme $m_1 m_2 m_3$, la table serait parallélépipédique, au lieu d'être rectangulaire. Pour plus de trois facteurs, elle affecterait la forme d'espaces à plus de trois dimensions, d'une réalisation pénible, mais dont la considération est utile pour la recherche et l'étude de certaines propriétés arithmétiques.

C.-A. LAISANT.