SUR LA DÉFINITION DE L'AIRE DES SURFACES

Autor(en): **Lebesgue, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10971

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LA DÉFINITION DE L'AIRE DES SURFACES

1. — On définissait autrefois l'aire d'une surface S comme étant la limite des aires d'une suite de surfaces polyédrales inscrites dans la surface S et tendant vers elle. M. Schwarz [1] a montré que cette définition est inacceptable. Depuis cette remarque de M. Schwarz, bien des définitions ont été proposées.

Celle de M. Minkowski [2] mise à part, toutes ces définitions font dériver la notion d'aire d'une surface S de la considération de surfaces polyédrales voisines de S. Quelques auteurs ont employé des surfaces polyédrales discontinues, voir par exemple les définitions proposées par Hermite [3] et M. Peano [4], ce qui a l'inconvénient de ne pas faire ressortir l'analogie des sens mathématique et vulgaire du mot aire. La plupart des auteurs ont considéré des suites de surfaces polyédrales inscrites dans la surface à mesurer mais, pour que les aires de ces surfaces aient une limite, ils les assujettissaient à des conditions supplémentaires : que les angles des faces ne tendent pas vers zéro, que les angles des plans des faces avec les plans tangents tendent vers zéro, etc [5]. Ces définitions sont très artificielles, les restrictions qu'on s'impose ne se justifient que parce qu'elles conduisent bien à un nombre limite ; de plus il n'est nullement évident que d'autres restrictions ne conduiraient pas à un autre nombre limite tout aussi

---

[1] Voir une lettre de M. Schwarz à Genocchi reproduite dans le cours d'Analyse lithographié d'Hermite, 1882. Une observation identique a été faite par M. Peano (*Atti dei Lincei*, 1890).

[2] *Jahrb. der Deutsch. Math. Verein.*, 1901.

[3] Voir le cours cité d'Hermite. La définition d'Hermite est reproduite dans de nombreux ouvrages.

[4] Voir la note citée de M. Peano. En réalité la définition de M. Peano ne fait pas intervenir des surfaces polyédrales voisines de la surface à mesurer, mais des surfaces formées d'aires planes.

[5] Au sujet de ces définitions, voir la note de M. Peano. Tout récemment M. Cartan vient de proposer une définition du même genre (*Comptes Rendus*, 1907).

intéressant. Mais en réalité, tant qu'on se limite aux surfaces définies par des fonctions à dérivées partielles continues, ce que l'on fait toujours, on sait à l'avance la valeur de l'aire, car on n'accepterait pas comme valable une définition qui ne fournirait pas pour aire l'intégrale double classique. Aussi, si l'on a pas de définition naturelle à proposer, serait-il plus franc de prendre l'intégrale pour définition de l'aire et de chercher ensuite une propriété géométrique de cette intégrale en reprenant en sens inverse l'un des raisonnements qui permet d'arriver à cette intégrale en partant d'une des définitions géométriques précédemment indiquées.

Dans ses leçons sur les théories générales de l'analyse, M. Baire emploie une méthode analogue à celle dont je viens de parler. Après avoir attaché à une surface le nombre aire par l'intégrale double classique, il montre que cette aire jouit de la propriété suivante : c'est la plus petite limite que puissent atteindre les aires d'une suite de surfaces polyédrales tendant vers la surface à mesurer.

Cette propriété, qui ne particularise pas les surfaces polyédrales voisines de la surface donnée, me paraît assez importante pour pouvoir être posée comme définition de l'aire. C'est la méthode que j'avais employée dans ma thèse [1]; elle me paraît présenter différents avantages sur la méthode de vérification de M. Baire et les autres méthodes indiquées, en particulier celui-ci. Il n'est peut-être pas suffisant de donner dans les cours d'analyse une définition de l'aire ; il faut encore faire le raccord entre cette définition et les évaluations d'aires faites en géométrie élémentaire ; sans doute on pourra toujours faire ce raccord par des calculs de vérification, mais il vaut mieux, il me semble, que la même définition soit adoptée en géométrie élémentaire et en analyse. En reprenant ici la méthode que j'ai indiquée je veux surtout faire voir qu'elle peut être employée dès la géométrie élémentaire ; je ne m'astreindrai pas cependant à employer le langage qui conviendrait pour être compris des débutants.

---

[1] Intégrale, Longueur, Aire ; *Annali di Matematica*, 1902.

M. Zoard de Geöcze [1] a proposé une définition qui diffère de la mienne seulement en ce qu'il assujettit les surfaces polyédrales qu'il considère à être inscrites dans la surface donnée ; cette définition peut aussi être employée dès la géométrie élémentaire, un peu moins simplement que la mienne il me semble.

J'essaierai d'abord de justifier la définition que je propose, j'en déduirai ensuite des conséquences en géométrie élémentaire et en analyse.

2. — Dans la pratique, pour mesurer l'aire d'une surface matérialisée non décomposable en surfaces connues, on mesure l'aire d'une surface polyédrale voisine. Pour imiter cela, ayant à mesurer une surface S, il nous faudra considérer des surfaces polyédrales S_1, S_2, ..., correspondant point à point d'une façon bunivoque et continue à S, et tendant vers S. Les surfaces S_i devront être choisies de manière que leurs aires A_i tendent vers une limite A.

On pourra toujours supposer que les faces de S_i sont divisées en triangles acutangles T_i de côté plus petit que $\frac{1}{i}$. B étant alors un nombre quelconque plus grand que A, remplaçons chaque triangle T_i par la surface latérale d'un tétraèdre à dièdres aigus, dont le triangle T_i considéré soit la base et tel que la surface latérale soit à la base dans le rapport $\frac{B}{A}$. Il est évident que la hauteur du tétraèdre est inférieure à $\frac{B}{A} \times \frac{1}{i}$, donc la surface Σ_i, formée par ces surfaces latérales, tend vers S en même temps que S_i ; elle correspond d'ailleurs évidemment point à point (je crois inutile ici et dans la suite d'expliciter les correspondances) à S_i donc

---

[1] *Comptes Rendus,* 1907 ; voir aussi la note citée de M. Cartan. — Dans ma thèse je n'ai pas choisi la définition de M. Zoard de Geöcze, d'une part, parce que, lorsqu'on mesure pratiquement une courbe ou une surface, on mesure des lignes polygonales ou des surfaces polyédrales voisines et non inscrites et d'autre part, parce que ma définition rendait plus facile certaines démonstrations, par exemple celle de la proposition : l'aire de la surface somme de deux autres est la somme des aires de ces deux autres. M. Z. de Geöcze a d'ailleurs démontré que, dans des cas très étendus, il y avait identité entre sa définition, celle de M. Peano et la définition par l'intégrale double.

à S, donc B est, tout comme A, une limite d'aires de surfaces polyédrales tendant vers S [1].

L'ensemble de ces nombres limites d'aire est donc formé de tous les nombres égaux ou supérieurs à un certain nombre *a* qui définit l'ensemble et qui est le seul qui soit attaché simplement et naturellement à cet ensemble. C'est donc *a* qu'on doit prendre pour aire.

Ainsi, *on appellera aire d'une surface S la plus petite des limites des aires des surfaces polyédrales tendant vers S.* Cette définition est acceptable parce qu'elle est d'accord avec les définitions antérieurement données des aires des surfaces polyédrales et des domaines plans. D'ailleurs, en ce qui concerne ces domaines, du moins ceux qui sont limités par des courbes de longueur finie (et je suppose qu'on n'en considère pas d'autres), on peut admettre que l'aire est précisément donnée par la définition précédente. Quoiqu'il en soit, je supposerai dans la suite que l'étude de ces domaines plans a été faite.

La définition proposée ici est entièrement analogue à l'une de celles que l'on peut proposer pour la longueur d'une courbe. D'autre part, une définition analogue peut être proposée pour les volumes des domaines quarrables ; sans doute dans cette dernière définition la considération *d'une plus petite limite* est inutile, mais il n'est peut-être pas sans intérêt de proposer, pour les trois principales grandeurs de la géométrie élémentaires des définitions entièrement semblables.

De la définition il résulte que : l'aire d'une surface est la plus petite des limites des aires des surfaces tendant vers elle ; les aires de deux surfaces égales ou symétriques sont égales ; les aires de deux surfaces semblables sont entre elles comme les carrés des dimensions homologues.

---

[1] Les collégiens de ma génération s'amusaient au raisonnement suivant : soit ABC un triangle, divisons la base AB en un nombre quelconque de parties et sur chacune d'elles comme base, construisons un triangle semblable à ABC. Les côtés de ces triangles forment une ligne polygonale égale à ABC et tendant vers AB quand le nombre des divisions augmente indéfiniment, donc $AB = AC + CB$. Nous démontrions de même que $\pi = 2$.

La plus grosse critique qu'on puisse faire en ces matières aux ouvrages de géométrie que nous avions est de constater qu'ils ne nous permettaient pas d'apercevoir une différence quelconque entre ce raisonnement et ceux qu'on nous faisait pour avoir la longueur d'une circonférence, la surface d'un cylindre ou le volume d'une sphère, puisqu'on ne nous définissait ni une longueur, ni une aire, ni un volume.

3. — Voici comment, en géométrie élémentaire, on peut faire usage de cette définition pour la mesure des surfaces classiques qui sont convexes.

Je suppose établi ce théorème : toute surface polyédrale convexe fermée a une aire plus petite que toute surface polyédrale enveloppante ; proposition dont la démonstration est entièrement analogue à celle de la proposition correspondante de la géométrie plane. De là il résulte que toute surface fermée convexe a une aire au plus égale à celle de toute surface enveloppante.

Ceci posé soient S une surface fermée convexe, S_1, S_2, ... des surfaces polyédrales [1] convexes tendant vers S ; je dis que leurs aires tendent vers celle de S. En effet, O étant un point intérieur à S, je prends les homothétiques Σ_1, Σ_2, ... de S_1, S_2 ... par rapport à O, les rapports d'homothétie K_1, K_2, ... tendant vers 1 et étant choisis de telle manière que Σ_1, Σ_2, ... soient intérieures à S.

L'aire de S est supérieure à celle de Σ_p quel que soit p, donc au moins égale à la plus grande des limites des aires de Σ_p ; d'autre part, d'après la définition, l'aire de S est au plus égale à la plus petite des limites des aires des Σ_p. Donc les aires des Σ_p tendent vers l'aire de S et il en est par suite de même des aires des S_p.

Soient maintenant S', S'_p les parties de S et S_p situées d'un certain côté d'un plan P, D et D_p les domaines plans découpés par S et S_p sur P, T et T_p les surfaces convexes formées par S' et D, S'_p et D_p. Soient, d'autre part, s_p des surfaces polyédrales tendant vers S' et dont les aires tendent vers celle de S', P_p un plan parallèle à P, tendant vers P quand p croît, et tel que s_p découpe sur lui un domaine plan d_p, s'_p la partie de s_p situé du côté considéré de P_p, t_p la surface polyédrale fermée formée de s'_p et t_p. La limite des aires des s'_p est au plus celle des aires de s_p, donc c'est l'aire de S' ; la limite des aires des S'_p est au moins l'aire de S'. Mais d'autre part les aires des t_p tendent au plus vers l'aire de T qui est la limite des aires des T_p et comme les aires des D_p et des d_p tendent

[1] Le mot « polyédrales » pourrait être supprimé.

vers l'aire de D, la limite des aires des S'_p est au plus égale à celle des aires des s'_p.

En définitive les aires des s_p, s'_p, S'_p ont la même limite l'aire de S', c'est-à-dire que le théorème précédent s'étend aux surfaces telles que S'. Naturellement il s'étendra aux surfaces S'' formées de la partie de S' situé d'un certain côté d'un plan Q, etc.

Du théorème ainsi complété il résulte immédiatement que la surface latérale d'un cône convexe, d'un cylindre convexe, d'un tronc de cône convexe est la limite des surfaces polyédrales convexes inscrites, d'où les formules classiques. D'où aussi la formule qui donne l'aire engendrée par une ligne polygonale régulière tournant autour d'un de ces diamètres.

Mais l'aire d'une zone est la limite des aires décrites par les lignes polygonales inscrites dans l'arc de grand cercle méridien, d'où l'aire d'une zone, d'une sphère.

Je reviendrai plus loin sur ces démonstrations pour mettre bien en évidence ce qui les complique et comment on peut les simplifier.

4. En analyse, on pourra raisonner ainsi : soit $z = f(x, y)$ une surface S, f est définie pour un domaine quarrable D du plan des (x, y) et y admet des dérivées partielles du premier ordre finies et continues.

Divisons le plan des xy, par des parallèles aux axes, en carrés de côté λ. Soient α un de ces carrés entièrement intérieur à D, C_0 le centre de α, M_0 le point correspondant de S, P_0 le plan tangent en M_0, α_0 le quadrilatère contenu dans P_0 et qui se projette sur α. Soient d'autre part des surfaces polyédrales S_i tendant vers S et dont les aires tendent vers celles de S ; il est évident qu'on peut toujours supposer que ces surfaces ne traversent pas plus d'une fois toute parallèle à oz. Soit α_i la partie de S_i qui se projette sur α et soit β_i la surface latérale du cylindre projetant les contours de α_0 et α qui est comprise entre ces contours. On a évidemment :

$$\text{aire } \alpha_0 < \text{aire } \alpha_i + \text{aire } \beta_i .$$

D'autre part faisons tendre simultanément λ vers 0, i vers ∞

et désignons par Σ une somme étendue à tous les carrés α. Σ aire α_i tend vers l'aire de S, on ne doit donc pas diminuer sa limite en remplaçant le morceau α_i par $\alpha_0 + \beta_i$, donc on a :

$$\lim \Sigma \text{ aire } \alpha_i \leq \lim \text{ inf. } \Sigma \text{ aire } \alpha_0 + \lim \text{ inf. } \Sigma \text{ aire } \beta_i .$$

Si donc on fait en sorte que Σ aire β_i tend vers zéro, on aura :

$$\text{aire S} = \lim \Sigma \text{ aire } \alpha_i = \lim \Sigma \text{ aire } \alpha_0 .$$

Or l'aire β_i est le produit du périmètre 4λ de α par un nombre inférieur à $\varepsilon_i + \eta_\lambda \lambda$, ε_i désignant le maximum de la différence parallèle à oz de S et S_i, η_λ étant la limite supérieure de l'oscillation de $\frac{\partial f}{\partial n}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ dans un carré λ. Donc on a, n étant le nombre des carrés α,

$$\Sigma \text{ aire } \beta_i \leq 4n\lambda\varepsilon_i + 4n\lambda^2\eta_\lambda :$$

$n\lambda^2$ est inférieur à l'aire de D donc borné, i et λ peuvent être associés de telle manière que $4n\lambda\varepsilon_i$ tend vers zéro et alors Σ aire β_i tend vers 0 [1].

Nous sommes ainsi ramenés à la définition d'Hermite, c'est-à-dire au calcul de Σ aire α_0. Or, x_0, y_0 étant les coordonnées de C_0, on a :

$$\text{aire } \alpha_0 = \lambda^2 \sqrt{\left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^2 + 1} ,$$

d'où l'on conclut de suite

$$\text{aire S} = \int\int_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy .$$

Soit maintenant une surface Σ décomposable en deux surfaces S et S′, analogues à la précédente, relatives aux domaines D et D′ qui se recouvrent partiellement et ont un arc lm de frontière en commun. Je suppose cet arc de longueur finie ; soient $l_i m_i$ des lignes polygonales dont les longueurs sont bornées qui tendent vers lm et découpent dans D et D′

[1] Un calcul entièrement semblable permettrait de comparer Σ aire α_0 à l'aire d'un polyèdre inscrit à S et dont les sommets se projettent aux sommets des carrés α. On ferait ainsi le raccord avec la définition de M. Zoard de Geöcze.

des domaines D_i et D'_i ne contenant pas lm. Soit S_i, S'_i des surfaces polyédrales de la nature de celles précédemment considérées distantes de S et S′ dans D_i et D'_i de moins de $\frac{1}{i}$ et dont les aires diffèrent des parties correspondantes de S et S′ de moins de $\frac{1}{i}$. La surface formée de s_i de s'_i et d'une partie du cylindre de section droite $l'_i m_i$ a une aire qui tend évidemment vers celle de Σ car l'aire de la portion de cylindre tend vers zéro. Donc l'aire de Σ est la somme des aires de S et de S′ et l'on peut maintenant démontrer dans toute sa généralité la formule qui donne l'aire en coordonnées curvilignes.

De cette formule il résulte que, si une surface est donnée en fonctions des cordonnées curvilignes u, v par des fonctions à dérivées premières continues, l'aire de la partie de cette surface, correspondant à un domaine quarrable D du plan des (u, v) somme de deux domaines quarrables D_1 et D_2, est la somme des aires des parties de surface correspondant à ces deux morceaux.

5. — Ce qui a compliqué les raisonnements des deux derniers paragraphes c'est que je me suis astreint à ne pas admettre, sans les démontrer, de cas particuliers de cette proposition : l'aire de la surface somme de plusieurs autres est la somme des aires de ces surfaces composantes. Je n'ai pas voulu admettre ces cas particuliers parce que, comme l'on sait, l'énoncé précédent n'est pas exact dans toute sa généralité. Il me semble d'ailleurs que l'énoncé qui termine le paragraphe 4 n'est pas satisfaisant en ce sens qu'il fait intervenir la représentation paramétique de la surface considérée et non pas seulement une propriété géométrique de la surface et des courbes employées; c'est pourquoi, qu'on ait ou non l'intention de s'en servir pour simplifier les raisonnements ultérieurs, on devrait, à mon avis, aussi bien en géométrie élémentaire qu'en analyse, affirmer qu'on démontre la proposition ci-dessus énoncée dans le cas où les arcs le long desquels se soudent les surfaces composantes sont de longueur finie.

La démonstration que j'ai donnée dans ma thèse pour cet

énoncé repose d'ailleurs sur un principe très simple, immédiatement compréhensible même aux élèves qui étudient la géométrie élémentaire seulement; mais, si l'on veut exposer ce raisonnement complètement, on est nécessairement conduit à ce qu'il m'a semblé à des longueurs devant lesquelles j'ai reculé dans ma thèse.

En tous cas il n'y a aucune difficulté à examiner le cas où l'arc le long duquel on soude les deux surfaces composantes est plan ; la démonstration devient particulièrement simple lorsque les deux surfaces partielles sont tout entières d'un même côté du plan considéré (voir le raisonnement de la fin du paragraphe 4) ou lorsque les deux surfaces sont tout entières de côtés différents de ce plan.

H. LEBESGUE (Poitiers).

UN NOUVEAU THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

---

1. — Cette qualification de « nouveau », que nous donnons au théorème en question, paraît véritablement justifiée, à la suite de recherches assez attentives et multipliées faites par plusieurs personnes. En raison même de l'extrême simplicité du sujet, on s'expliquerait difficilement un silence complet, aussi bien dans les traités classiques que dans les recueils d'exercices les plus répandus.

L'un des côtés originaux de cette proposition, c'est qu'elle a été découverte et démontrée, sans avoir été énoncée ; tandis que celui qui l'a énoncée est le premier à déclarer qu'il n'en est pas l'inventeur.

A propos des tables de numération inverses, dans son *Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques* (p. 29-31) M. Gabriel Arnoux a en effet établi implicitement le théorème