Première Partie.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

PARALLÉLISME ET TRANSLATION RECTILIGNE

Première Partie.

1. Quand un plan mobile glisse sur un plan fixe de manière que la droite qui joint deux points A et B du plan mobile soit constamment assujettie à coïncider avec une droite fixe Δ du plan fixe, on dit que le plan mobile est animé d'un mouvement de *translation rectiligne*, dont la direction est celle de la droite Δ, soit dans un sens, soit dans le sens contraire.

Soit M un point du plan mobile non situé sur AB. En traçant MA et MB on forme un triangle *invariable* que sa base entraîne par suite de son glissement sur la droite Δ. Soit MP la hauteur issue du point M. Dans le déplacement considéré du triangle MAB le sommet M décrit une *ligne* dont tous les points sont à la même distance $MP = l$ de la droite Δ.

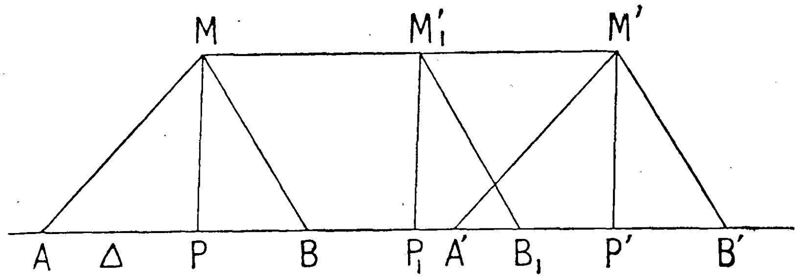

FIG. 1.

Mais *a priori* on ne peut affirmer que le point M décrit une *ligne droite*.

Mais on peut vérifier facilement, au moins dans une *petite étendue*, que si le triangle a été amené de la position MAB à la position $M'A'B'$ (fig. 1), le point M s'est déplacé, dans ses diverses positions sur le *segment* de droite MM'.

Supposons en effet que Δ soit une arête d'une règle maintenue fixe sur une feuille de dessin ; que le triangle MPB soit une face d'une équerre appliquée sur la même feuille et que l'on fait glisser en appuyant le côté PB de l'angle droit contre la règle. Après avoir déplacé l'équerre pour l'amener de la position MPB à la position M'P'B', traçons la droite MM' ; si nous amenons l'équerre dans une autre position quelconque M_1 P_1 B_1 entre les deux premières, nous constatons que le sommet M_1, autre position quelconque du sommet mobile M se trouve sur le *segment* de droite MM'.

Cette vérification expérimentale ayant lieu sur des segments de droite de longueurs différentes, on se trouve conduit à l'axiome suivant :

Axiome. — Dans un mouvement de translation rectiligne *on considère comme évident* qu'un point quelconque M du plan mobile décrirait une *droite indéfinie* si le mouvement se continuait indéfiniment soit dans un sens, soit en sens contraire.

2. Comme première conséquence de cet axiome nous allons d'abord démontrer le théorème suivant :

Théorème I. Quand un point mobile se meut dans un plan fixe de manière à rester constamment à la même distance l d'une droite Δ de ce plan, si l'on considère *comme évident* que le point mobile décrit une *droite indéfinie* D, la *perpendiculaire* menée à la droite Δ de chacune des positions du point mobile est également perpendiculaire à la droite D. — Démonstration : Soit M une certaine position du point mobile (fig. 2) ; menons MP perpendiculaire à la droite Δ, et d'une autre position *quelconque* A du point mobile menons AB perpendiculaire à la droite Δ. On a par hypothèse $AB = MP = l$. Autour de MP, considérée comme une droite indéfinie, faisons tourner le demi-plan situé à sa gauche pour l'appliquer sur le demi-plan situé à sa droite. Le point B prendra sur la droite Δ une position B', symétrique de B par rapport à la perpendiculaire MP sur la droite Δ ; le seg-

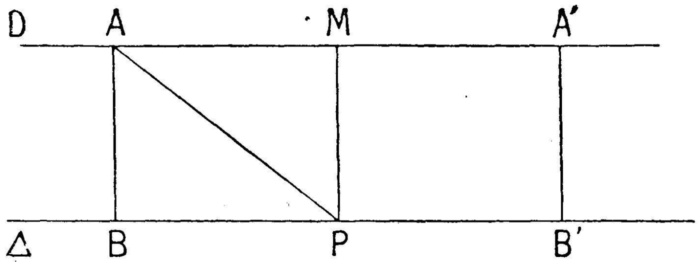

Fig. 2.

ment de droite BA se placera en B'A' perpendiculairement à la droite Δ et le point A' se confondra avec une nouvelle position du point mobile.

Mais, *si l'on considère comme évident* que les diverses positions A, A', M etc., etc. du point mobile appartiennent à une même droite D, le segment MA' est le prolongement du segment AM de cette droite D. Or les deux angles adjacents PMA et PMA' sont égaux par symétrie ; donc la droite PM, perpendiculaire sur la droite Δ, est aussi perpendiculaire sur la droite D.

Pour démontrer qu'il en est de même de BA par exemple, traçons la droite PA ; nous formons deux triangles PMA et PBA qui sont rectangles l'un au point M et l'autre au point B ; ils ont la même hypoténuse PA et un côté de l'angle droit égal : PM $=$ BA $= l$; donc ces triangles sont égaux et on a d'abord AM $=$ BP. On a en outre : $\widehat{APB} = \widehat{PAB}$ et $\widehat{PAM} = \widehat{APB}$. Or la somme des deux angles aigus au point P vaut un droit ; donc il en est de même de la somme des angles aigus au point A. Donc : la droite AB, perpendiculaire à la droite Δ, l'est également à la droite D. On peut donc conclure que :

La perpendiculaire menée à la droite Δ de chacune des positions du point mobile est également perpendiculaire à la droite D.

C. Q. F. D.

Remarque. — Puisque les segments BA, PM, etc., sont perpendiculaires sur la droite D et ont tous la même longueur l, on voit que les distances à la droite D des divers points de la droite Δ sont les mêmes que les distances à la droite Δ des divers points de la droite D. Il y a donc, à ce point de vue, *réciprocité* entre les droites D et Δ.

3. Rectangle. — Le quadrilatère ABPM de la figure précédente a ses quatre angles droits ; on l'appelle un *rectangle*. On vient de prouver que la diagonale PA le partage en deux triangles rectangles égaux et que les côtés opposés de ce rectangle sont égaux 2 à 2. Pour construire un rectangle il suffit donc de mener à une droite Δ, d'un même côté, en

deux points différents B et P, deux perpendiculaires de même longueur l, BA et PM, puis de tracer la droite AM.

En effet, si un point mobile se déplace dans le plan de la figure et au-dessus de Δ de manière à rester toujours à la distance l de Δ, il passera nécessairement par A et par M; or il décrit une droite D, donc cette droite coïncide avec AM; dès lors les droites BA et PM, perpendiculaires à Δ, le sont à la droite AM; donc le quadrilatère ABPM est bien un rectangle.

Si on traçait la seconde diagonale BM il est facile de démontrer qu'elle est égale à la première. En outre leur point de rencontre est le milieu de chacune d'elles.

Somme des angles d'un triangle.

4. *1er cas.* Triangle rectangle. — On a le théorème suivant:

Théorème II. Dans un triangle rectangle les angles aigus sont complémentaires.

Considérons en effet le rectangle ABPM (fig. 2). La diagonale PA le partage en deux triangles rectangles égaux ABP et PMA. L'angle BAP a pour complément l'angle PAM, lequel est égal à l'angle APB. Donc dans le triangle rectangle ABP les deux angles aigus sont complémentaires. Or, ce triangle étant donné, on pourrait construire comme on vient de l'indiquer le rectangle ABPM; donc, d'une manière générale on peut dire: Dans tout triangle rectangle les deux angles aigus sont complémentaires.

C. Q. F. D.

Corollaire. — Dans tout triangle rectangle la somme des trois angles est égale à deux angles droits.

En effet: L'un des angles est droit et la somme des deux autres est égale à un droit; donc la somme des trois angles est égale à deux droits.

C. Q. F. D.

2e cas. Triangle quelconque. — On a le théorème suivant:

Théorème III. Dans tout triangle la somme des trois angles est égale à deux droits.

Du sommet A par exemple d'un triangle ABC, concevons que l'on mène la perpendiculaire AP sur le côté opposé BC. Si le point P est entre B et C l'angle A se trouve partagé en deux parties A_1 et A_2 dont il est la somme. Dans le triangle rectangle APB l'angle A_1 est le complément de l'angle B et on a : $A_1 + B = 1^{dr}$; de même le triangle rectangle APC donne : $A_2 + C = 1^{dr}$. En ajoutant ces relations membre à membre et remarquant que $A_1 + A_2 = A$ on obtient: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2^{dr}$.

Si le point P est d'un même côté des points B et C, à droite de C par exemple, on aura : $A = A_1 - A_2$; et les triangles rectangles APB et APC donneront : $\widehat{A_1} + \widehat{B} = 1^{dr}$ puis $\widehat{A_2} + (2^{dr} - \widehat{C}) = 1^{dr}$. Donc : par différence on obtient: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 2^{dr} = 0$ et par conséquent $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2^{dr}$ C. Q. F. D.

Remarque. — Soit CF le prolongement du côté BC d'un triangle ABC ; l'angle ACF est appelé *angle extérieur* au point C ; il a pour supplément l'angle $\widehat{C}$ du triangle ; il est donc égal à la somme $\widehat{A} + \widehat{B}$ des deux autres ; ainsi : Dans tout triangle un angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents.

Corollaire. — Le théorème qui précède conduit au suivant:

Théorème. — Dans tout polygone convexe la somme des angles intérieurs est égale à autant de fois 2^{dr} que le polygone a de côtés, moins deux.

Soit n le nombre des côtés, la somme en question aura pour expression $(n - 2)$ fois 2^{dr} ou $(2n - 4)^{dr}$. Nous nous bornons à l'énoncé du théorème en ajoutant que la somme des angles extérieurs est constante et toujours égale à 4^{dr}.

Remarque particulière. — On sait que dans la géométrie non-euclidienne la somme des angles d'un triangle est inférieure à 2^{dr}. Soit $\delta = 2^{dr} - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})$, et désignons par S l'aire du triangle ABC. La constante K d'une telle géométrie peut se représenter par le rapport $\frac{S}{\delta}$ (Voir la note B sur le Postulatum d'Euclide dans la géométrie de M. Hadamard). A cause de l'axiome du début, qui a donné naissance au *rec-*

tangle, nous avons $\delta = 0$ et par suite $K = \infty$, ce qui établit la différence essentielle entre la géométrie euclidienne et la géométrie non-euclidienne.

Deuxième partie.

1. En tenant compte du théorème I, nous nous servirons du mot *parallèle* en lui attribuant une signification spéciale qui nous permettra de tirer parti de la définition suivante :

Définition. — On dit qu'une droite D *est* PARALLÈLE *à une droite* Δ *quand les deux droites sont dans un même plan et que la première a tous ses points à la même distance de la seconde.*

Cette définition se justifie à l'aide du théorème suivant :

Théorème I. Si deux droites sont perpendiculaires à une 3^e, l'une d'elles est parallèle à l'autre.

Démonstration. — Dans le plan de la figure 3 considérons deux droites D et Δ respectivement perpendiculaires à la droite LL', la première au point A, la seconde au point B, nous allons prouver que la droite D est parallèle à la droite Δ, c'est-à-dire, puisqu'elles sont déjà dans le même plan, que les divers points de la droite D sont à la même distance $AB = l$ de la droite Δ. Soit un point P quelconque de la droite Δ, menons par ce point, du côté de la droite D la perpendiculaire PM à la droite Δ et prenons $PM = BA = l$. Si on trace AM on formera un rectangle ABPM (3, 1^re partie). Le côté AM de ce rectangle est par suite perpendiculaire sur LL' au point A et par suite se confond avec la droite D qui est la seule perpendiculaire possible en ce point à la droite LL'. Le point M est donc sur la droite D et sa distance MP à la droite Δ est égale à l ou AB. Or dans le rectangle ABPM on a $AM = BP$. On peut donc considérer le point M comme un point quelconque de la droite D, puisque le point P est un point quelconque de Δ. Donc :

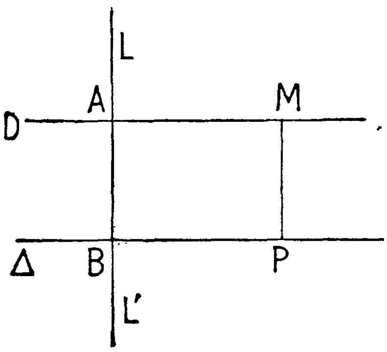

Fig. 3.