

# GIUSTO BELLAVITIS SA CORRESPONDANCE SCIENTIFIQUE

Autor(en): **Alasia, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-9256>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.



GIUSTO BELLAVITIS

1803-1880

## GIUSTO BELLAVITIS

### SA CORRESPONDANCE SCIENTIFIQUE

Le 6 novembre 1905, il y a eu exactement vingt-cinq ans que cessait de vivre dans la ville de Trezze, près Bassano, *le comte Giusto Bellavitis*. Admirable comme savant et comme citoyen, il a légué son nom à une théorie qui fut l'orgueil de sa vie, *la théorie des équipollences*. Rendre un hommage à sa mémoire est pour moi un devoir agréable à remplir, comme Italien et comme admirateur de sa doctrine. En publiant de lui des lettres<sup>1</sup> ou des fragments de lettres, pour les lecteurs de *l'Enseignement mathématique*, je dirai préalablement quelques mots de sa vie si bien remplie.

<sup>1</sup> En avril 1901, j'envoyais à *l'Intermédiaire des Mathématiciens* une question qui, sous le numéro 2137, a été insérée à la page 189 du tome VIII. Immédiatement après je recevais de M. le Professeur C.-A. Laisant, avec qui j'étais depuis quelque temps en relations amicales, un paquet de lettres, et le billet suivant : — « Vers la fin de l'année 1869, sur la prière de Hoüel, avec qui j'étais en correspondance, G. Bellavitis m'envoya deux de ses Mémoires. Comme je ne lisais pas un mot d'italien à cette époque, je lui répondis en le remerciant et lui exprimant mon regret de ne pouvoir le comprendre. De là sa première lettre où il me prodiguait avec une rare bienveillance des conseils qui me permirent, au bout de quelques semaines, de comprendre couramment un Mémoire mathématique italien. Notre correspondance, interrompue par les événements des fatales années 1870-71, fut ensuite reprise d'une façon régulière et se prolongea jusqu'à sa mort. J'ai conservé précieusement ses lettres et je suis heureux de les confier à mon ami M. Alasia pour la publication de la correspondance d'un grand géomètre, qui fut aussi un homme de grand cœur. On y trouvera la marque des qualités d'ingéniosité, de bon sens, de clarté, qui caractérisent l'esprit inventif de Bellavitis et la preuve surabondante de l'affectueuse bienveillance qu'il montrait aux plus humbles. »

Je publie deux de ces lettres et des fragments pris dans quelques-unes des autres, ayant un caractère trop familier pour être publiées dans leur entier.

Quelques mois après, exactement le 11 juillet 1902, M. Gabriel Torelli, le savant professeur de l'Université de Palerme, applaudissant à ma tentative, m'envoyait trois lettres qu'il possédait, l'une adressée à lui-même et les deux autres à deux jeunes mathématiciens qui appartenaient à une « Association des conférences mathématiques » fondée à Naples. Elles sont d'un grand intérêt scientifique et je les traduis intégralement. On les trouvera plus loin.

Bellavitis eut une correspondance active et très agréable avec de nombreux mathématiciens italiens et étrangers, parmi lesquels plusieurs ont malheureusement disparu, ce qui a rendu très pénible la recherche des lettres. Celles adressées à M. Buoncompagni, par exemple, ont été vendues à un inconnu par un marchand de livres d'occasion de la place S. Pietro in Vincoli, à Rome ; j'ai pu vérifier le fait moi-même ; celles adressées à M. Tortolini sont en possession de M. J. Halle, libraire à Munich, et en vente à un prix assez élevé ainsi que la correspondance de M. Tortolini lui-même avec plusieurs mathématiciens italiens. M. le professeur Barbarin, du Lycée de Bordeaux, a eu la bonté de se charger de la recherche des lettres adressées à Hoüel et il s'est mis en communication avec la famille de celui-ci : il est probable qu'il réussira. Les lettres adressées à M. Emmanuel Fergola, de l'Observatoire Royal de Naples, sont peut-être égarées ; c'est la crainte de ce savant astronome. Que sera-t-il advenu de la correspondance qui était entre les mains de MM. Cremona, Chelini, Casorati, Crelle, Terquem, Brioschi, Beltrami, Genocchi, Massalongo, Matteucci, Dorna, Fusinieri, Battaglini, Pegorini, etc ? Je poursuivrai mes recherches, dans l'espoir d'une réussite satisfaisante.

Bellavitis mérite une place des plus honorables parmi ceux qui par eux-mêmes et par leurs œuvres, peuvent servir de modèles à la jeunesse : il dut tout à lui, bien peu aux autres. — Né le 22 novembre 1803, à Bassano, village situé à 40 km. de Padoue, d'une noble mais très pauvre famille, il fut obligé d'abandonner les écoles, à peine adolescent, pour se placer comme copiste à la mairie de son pays natal ; à l'âge de 19 ans, de copiste il devint secrétaire ; il garda cette charge, trop modeste pour ses mérites et son talent, mais qui pourtant lui donnait le moyen de vivre, jusqu'à l'approche de sa quarantième année. — Mais ce n'était pas seulement dans l'ingrat travail de sa charge qu'il limitait son activité. Son père avait recherché lui aussi un soulagement à ses fatigues quotidiennes et aux persécutions de l'adversité dans l'étude des mathématiques : il partagea avec son fils ce qu'il avait appris par lui-même, et ce fut la seule richesse qu'il put lui laisser en héritage. Aussi dans les dernières années de sa vie G. Bellavitis répétait avec fierté qu'il n'avait eu que deux maîtres : son père et lui-même. Les heures de bureau accomplies, il courait vers sa modeste petite chambre, et là il s'adonnait pendant de longues heures à l'étude de sa science favorite, au moyen de livrés qui ordinairement lui avaient été prêtés et que parfois il copiait, n'ayant pas la possibilité d'en acheter un exemplaire. En attendant, il avait commencé à publier les résultats de ses études, qui dès l'abord méritèrent l'attention des savants, par leur originalité et par la grande étendue des connaissances qu'ils dévoilaient chez l'auteur ; mais celui-ci continuait à être le modeste secrétaire de la mairie de Bassano. Dans une lettre à M. Laisant, datée du 27 décembre 1872, il complète lui-même ainsi sa biographie : « ...*Comme j'avais fait toutes mes études par moi-même et comme je n'avais pas suivi les cours officiels, il semblait que la carrière de l'instruction publique dut m'être fermée ; mais lorsque l'Institut Venitien fut rétabli par l'Empereur Ferdinand, j'y fus agrégé en 1840. Ce fait, l'amitié de quelques-uns et ma fortune constante me firent nommer (1842) Professeur de mathématiques au Lycée de Vicence ; ensuite, en 1845<sup>1</sup>, Professeur de Géométrie descriptive à l'Université de Padoue, et après l'unification italienne (1867) je changeai cette chaire pour celle d'Algèbre complémentaire et Géométrie analytique. J'eus plusieurs amis, morts pour la plupart, à ma grande affliction. D'un caractère toujours gai, aimant les discussions sans jamais me passionner, libre-penseur, libéral, un peu républicain de sentiments. sincères et franc, je ne pouvais pas être agréable à la domination étrangère ; mais néanmoins je n'en souffris aucune persécution. Ces provinces libérées, beaucoup par ma fortune habituelle et peut-être*

<sup>1</sup> A cette époque, il obtint, sans examens et sans demande de sa part, le doctorat en mathématiques.

*aussi parce qu'on jugeait que beaucoup de Professeurs n'avaient guère de sentiments italiens (après on découvrit que les autres étaient plus libéraux que moi), je fus par le Gouvernement nommé Sénateur; j'allai plusieurs fois à Florence<sup>1</sup> et à Rome, mais l'école et ma famille m'attiraient bientôt à Padoue. Ici la vie m'est très agréable: mes concitoyens me nommèrent et jusqu'à présent me conservent conseiller municipal.»* — Dans sa modestie, Bellavitis ne manqua jamais d'attribuer à la fortune bienveillante ce qu'il ne devait qu'à sa tenace volonté, à son puissant esprit. Ennemi des louanges exagérées il voulut rédiger lui-même l'inscription<sup>2</sup> du marbre que, selon l'usage commun, ses parents auraient placé sur son tombeau; et quand, en 1878, il prévoyait sa fin prochaine, il voulut écrire lui-même la lettre de faire-part de sa mort, en y mettant de sa main l'adresse de ses amis et laissant naturellement la date en blanc. A quelques-uns cela paraîtra peut-être un acte original; mais cet acte montre assurément combien, en suivant la religion du vrai et du devoir, on affronte avec intrépidité le problème de l'au-delà<sup>3</sup>.

L'activité scientifique de Bellavitis ne s'est pas limitée seulement au champ mathématique, il a voulu s'occuper aussi de météorologie, de chimie, d'histoire naturelle, d'économie, de géographie, de philosophie et même de littérature<sup>4</sup>. Certainement il n'a pas pu montrer dans ces questions la même compétence qu'il apportait dans les choses mathématiques; mais dans ces écrits divers on rencontre une note toute particulière qui démontre la sûreté de jugement et la pénétration d'esprit du grand géomètre italien.

Sa « *Théorie des figures inverses* » parut en 1836: c'est un travail de grand mérite et qui fut loué par tous les géomètres; il y traite, par la méthode des équipollences dont il avait publié des

<sup>1</sup> Capitale de l'Italie jusqu'à la prise de Rome, en 1870.

<sup>2</sup> « *Si mon fils voulait conserver mon nom inscrit sur une pierre, je le prie de la faire murer en quelque endroit de NOTRE, c'est-à-dire, de SA maison, où elle pourrait être lue avec profit par quelques-uns de nos descendants; hors de là, toute mémoire n'a pas de raison d'être.* »

Giusto Bellavitis  
Naquit à Bassano (1803)  
De Ernest et de Jeanne Navarini.  
L'amour de l'étude  
et d'heureuses circonstances  
le firent  
Professeur à Vicence (1842), à Padoue (1845-18...)  
et Sénateur du Royaume d'Italie (1866)  
Il fut conseiller municipal (1866-18...)  
Il écrivit sur les mathématiques  
et inventa la méthode des équipollences.  
Epoux et père affectueux  
il vécut heureux.

<sup>3</sup> G. TORELLI. — *Commemoration de G. Bellavitis* à l'Académie Pontonienne de Naples.

<sup>4</sup> Les écrits de Bellavitis surpassent le nombre de 200.

essais depuis 1833, la transformation que Plücker avait établie depuis deux ans seulement, et il en donne des applications nouvelles et très importantes suggérant en même temps un beau principe de représentation. Mais son travail n'eut ni la publicité ni le succès qu'il méritait, et le principe de représentation développé par lui entra un peu plus tard dans le domaine géométrique, sous le couvert des noms de Thomson, de Liouville et de Möbius. Deux ans plus tard, il publiait l'« *Essai de géométrie dérivée*, » où il exposait à la jeunesse italienne les doctrines de Poncelet, de Steiner et de Chasles qui avaient ramené la géométrie synthétique à une forme dont la simplicité et la fécondité sont très remarquables.

Il consacra une attention toute particulière aux questions qui de son temps constituaient les sujets préférés des mathématiciens : observateur éclairé et profond, il retrouvait dans les recherches des ses prédécesseurs et de ses contemporains des lacunes qu'il était utile de combler. Ce fut ainsi que de l'étude des coefficients dans les développements des « *potestés* »<sup>1</sup>, il put déduire une longue succession d'intéressantes propriétés des nombres Bernoulliens et Eulériens, établissant des méthodes pour les calculer avec grande facilité et donnant de nombreux développements en séries, où ces nombres figuraient.

Mais ses recherches sur les imaginaires forment la plus belle page de son œuvre scientifique ; adversaire implacable de l'introduction de ces quantités dans l'algèbre, il a toujours vaillamment combattu les méthodes par lesquelles les différents auteurs en exposaient la théorie, soutenant que les imaginaires devaient seulement être considérées comme des quantités géométriques. Cette aversion est certainement exagérée ; elle ne peut trouver sa justification que dans la manière peu rigoureuse dont la théorie de ces quantités était exposée, même dans les plus célèbres traités ; mais cette disposition a certainement contribué à féconder dans son esprit la méthode des équipollences, qui a été l'orgueil de toute sa vie. — *Les développements et les applications de la méthode des équipollences*, — dit-il dans une lettre à M. Laisant (28—VI—1873), *je les ai écrits en 1832 chez celle qui depuis a été ma femme chérie, pendant qu'elle m'accompagnait, travaillant ou chantant ; vous voyez combien à cette méthode, je suis lié par de très chers souvenirs.* » Le travail de l'esprit et la poésie du cœur, deux rayons divins qui ne devaient cesser d'éclairer toute sa vie !

Mais pourquoi, demandera-t-on, cette méthode ne reçut-elle pas l'accueil que l'auteur espérait ? — Le célèbre Hamilton<sup>2</sup> avait

---

<sup>1</sup> *Potesté* d'exposant positif exprime le produit  $x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$ , et *potesté* d'exposant négatif, la fraction  $\frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$ .

<sup>2</sup> Né à Dublin le 3 août 1805, et mort dans cette même ville le 2 septembre 1865.

édifié, presque en même temps que Bellavitis annonçait les applications de sa méthode, un système d'imaginaires auxquelles il avait donné le nom de *quaternions*; ses nombreux travaux, presque tous publiés dans le « *Philosophical Magazine* » sont ceux qui parurent quelques années après, en 1853, à Dublin en un volume de près de 900 pages, sous le nom de « *Lectures on quaternions* ». — Les quaternions et les équipollences sont deux algorithmes qui ont une commune ressemblance avec l'agorithme algébrique et une signification essentiellement géométrique. Mais alors que la méthode des équipollences est l'un des moyens les plus simples et directs de représentation des relations en grandeur et position, elle perd beaucoup de son mérite lorsqu'on l'applique aux figures de l'espace; cela au contraire n'arrive pas pour la méthode des quaternions qui est donc plus générale. Bellavitis s'était pleinement rendu compte du défaut de généralité de sa méthode, car il en parle dans plusieurs de ses lettres; mais il ne s'est jamais lassé de montrer tous les avantages qu'on pouvait en tirer, et il l'a appliquée à un très grand nombre de questions de géométrie et de mécanique qu'il publiait sous le nom de « *Revue des journaux* ». Son Mémoire capital sur cette méthode<sup>1</sup> est la « *Sposizione del metodo delle equipollenze* », inséré dans le volume pour 1854 des « *Mémoires de la Société italienne des sciences* », et qui ensuite fut traduit en français par M. C.-A. Laisant et en langue bohême par M. Zahradnik. Mais cette méthode, à peine publiée, a eu le malheur de se trouver, sans parler des quaternions, en présence d'une autre très puissante elle aussi, le *Calcul barycentrique* de Möbius. Bellavitis en plus d'une occasion reproche aux géomètres italiens d'avoir fait trop peu attention à la méthode inventée par lui, et il écrit<sup>2</sup> à M. Laisant, lorsque celui-ci allait commencer la traduction de sa « *Sposizione* » :

« Je vous suis grandement obligé pour la peine que vous vous

<sup>1</sup> En outre, il a publié sur les équipollences les travaux suivants :

*Sur certaines applications d'une nouvelle méthode de géométrie analytique*, dans la revue « *Le Poligraphe* » de Verone, juin 1833, t. XIII, pag. 53-61.

*Essai d'une nouvelle méthode de géométrie analytique (Calcul des équipollences)*. — Annales dites de Fusinieri, 1835, in-4°, t. V, pag. 244-259.

*Mémoire sur la méthode des équipollences*. — Mêmes Annales, 1837, t. VII, 79 pages.

*Solutions graphiques de certaines questions de géométrie recherchées par la méthode des équipollences*. — Mémoires de l'Institut vénitien, 1843, in-4°, t. I, pag. 225-267.

*Calcul des quaternions et ses relations avec la méthode des équipollences*. — Actes du même Institut, 1858, t. III, et Mémoires de la Société italienne des Sciences, 1858, in-4°, t. I, 63 pages.

*Exposition des nouvelles méthodes de la géométrie analytique*. — Mémoires du même Institut, 1860, 159 pages.

*Eléments de géométrie et de trigonométrie et de géométrie analytique, avec l'addition de l'exposition de la méthode des équipollences*. — Padoue, 1862, 196 pages.

*Revue des Journaux*. — Actes du même Institut, 1859-1873.

*Considérations sur la mathématique pure*. — Mémoires du même Institut, 1867-1872.

<sup>2</sup> Lettre datée de Padoue, 27 décembre 1872.

donnez afin de faire connaître en France ma méthode des équipollences. Je vous avoue que depuis quarante ans j'ai la conviction que sous un nom ou un autre les principes de la méthode finiront par être adoptés, et cela pour les raisons que vous aussi avez justement indiquées. Mais je manque de persévérance et je fus aussi un peu infortuné. En Italie, personne n'a fait attention à mes idées, et, si après quelques années on en adopta quelques unes, on préféra les attribuer plutôt aux allemands. Quand Cauchy adopta et loua les idées de Saint Venant, je pris finalement la décision de lui écrire que j'avais employé et publié, moi aussi, des idées semblables bien longtemps auparavant ; mais peu après, Cauchy mourut. J'envoyais aussi plusieurs mémoires à l'Académie des Sciences (de l'Institut de France), mais tandis que dans les comptes-rendus on annonçait tout au long les titres de tous les mémoires sur la trisection de l'angle, des miens on annonça le titre d'un seul en ajoutant « et plusieurs autres » !

..... M. Hoüel est pour moi un ami très cher et vraiment affectionné : il a beaucoup fait pour les équipollences, mais toutefois il ne considère pas la chose à mon point de vue. Observez la dernière partie de son CALCUL INFINITÉSIMAL : il y considère les quantités dites COMPLEXES comme des termes algébriques ; et ensuite il en fait application à la géométrie ; au contraire, le calcul de ces quantités et les quantités elles-mêmes sont essentiellement géométriques. Il faut rompre avec les anciennes idées des imaginaristes et rester dans le vrai champ géométrique ; on ne doit pas se faire scrupule d'adopter quelques nouveaux mots et les deux signes  $\Omega$  et  $\mathfrak{S}$ . MM. Bourget et Darboux, eux aussi, ont pour moi de la bienveillance, mais je ne saurais les importuner à ce propos<sup>1</sup> : faites donc vous-même ce que vous pouvez et ce que vous trouvez de mieux. Si vous vouliez bien me favoriser de quelques notes sur les équipollences, je serais très heureux de les publier dans mes « REVUES » (comme je l'ai fait pour des solutions que m'a envoyées M. Emile Français) et cela fera du bien aux équipollences en Italie vis-à-vis des nombreux mathématiciens qui n'estiment que les choses étrangères. Vous pouvez publier aussi ces mêmes travaux, s'ils y sont accueillis, dans vos Revues, mais il faudra que vous vous donniez la peine d'expliquer en détail les principes de la méthode, car il ne faut pas espérer qu'on se rappelle le mémoire où M. Hoüel les exposait. »

A propos de l'origine de sa méthode, M. Bellavitis écrivait encore la lettre suivante à M. Laisant qui, ayant complété la traduction de la « Sposizione », lui en communiquait la préface :

<sup>1</sup> C'est-à-dire pour leur demander d'insérer dans les Revues françaises les traductions de ses Mémoires.

Padoue, 29-VI 1873.

Mon cher ami,

Je vous dois les plus grandes obligations pour la manière très favorable suivant laquelle vous présentez ma méthode des équipollences. Je m'aperçois que si, dès le commencement, je m'étais adressé aux mathématiciens français, la méthode ne serait pas tombée dans l'oubli où les Italiens l'ont laissée. J'envoyai, il y a bien longtemps, un écrit en langue française à Poncelet, mais je n'en reçus aucune réponse; je m'adressai à Cauchy (qui approuvait et développait les idées de Saint Venant, comme je vous l'ai déjà indiqué, mais sa fin prématurée l'empêcha de s'occuper de moi. Je n'eus pas même de réponse de M. Möbius, bien que sous un certain point de vue, les équipollences puissent être considérées comme une généralisation de son calcul barycentrique; plus tard, il adopta d'autres idées qui m'appartenaient, mais il ne me cita jamais: c'est la difficulté de la langue!...

A propos du grand génie que fut Cauchy et observant la date de ses « EXERCICES D'ANALYSE », il vient d'abord à la pensée que c'est lui qui a été l'inventeur des fondements de la méthode des équipollences. Dans une note de mon « ESSAI SUR L'ALGÈBRE DES INVARIANTS » j'écrivais: M. Cauchy, dans un post-scriptum à l'un de ses Mémoires (Mém. de l'Ac. d. Scienc. de l'Inst. de France, 1836, t. XXII, pag. 131) expose plusieurs des principes fondamentaux adoptés également par moi dans cet « ESSAI » et il déclare comment, après mûre réflexion, il trouve favorable de substituer à la théorie des IMAGINAIRES CONSIDÉRÉS COMME DES SYMBOLES LA THÉORIE DES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES exposée par Saint Venant dans son Mémoire inséré dans les Comptes Rendus pour 1845, t. XVI, pag. 620. Maintenant, on pourra ajouter ces autres citations: Comptes-Rendus, 3-IX-1849, t. XXIX, où Cauchy donne l'histoire de la représentation géométrique des imaginaires et dit qu'il lui semble que le meilleur parti est d'abandonner l'usage de  $\sqrt{-1}$  et de le remplacer par la théorie des quantités géométriques: « EXERCICES D'ANALYSE », 1847, t. IV, pag. 157-180. Ces citations viennent apporter l'appui, non seulement du raisonnement, mais aussi d'une autorité indiscutée, à mon avis, que les imaginaires ne peuvent se justifier dans l'algèbre, mais que la géométrie présente un objet réel auquel on peut appliquer un calcul assujéti aux mêmes règles que le calcul algébrique et qui l'embrasse comme cas particulier. Donc, toutes les fois que le signe  $\Im$  s'évanouit, on a une vérité sur les quantités algébriques.

Vous pouvez aussi remarquer ce qui suit; bien qu'il soit probable que la première idée sur les équipollences soit née en moi en observant la manière par laquelle Buée et Argand PRÉTENDAIENT

REPRÉSENTER LES IMAGINAIRES, *toutefois, je nie absolument qu'il soit possible de représenter ce qui est impossible et absurde ; au contraire, par un simple signe  $\Im$  on peut représenter le rapport très réel de deux droites perpendiculaires ; la méthode des équipollences est une théorie géométrique qui subsiste en elle-même et qui a, par dessus tout, une signification géométrique : en outre, elle est le seul fondement d'un calcul qui embrasse le calcul algébrique. Je voudrais vous tirer de votre point de vue que la théorie des imaginaires et sa représentation possèdent les deux avantages auxquels vous faites allusion, pour vous amener au mien ; je voudrais aussi voir substituer l'ordre logique à l'ordre historique. Je vois que Mourey s'est également laissé guider par le dernier point de vue plutôt que par le premier ; par le mien plus que par celui où vous vous placez. »*

Il faut remarquer la variété des sujets auxquels M. Bellavitis touchait successivement dans sa correspondance, pas tous géométriques : dans une autre lettre à M. Laisant, datée de décembre 1874, par exemple, il commence à lui annoncer l'envoi d'un discours sur la logique en ajoutant que c'est son testament philosophique et que probablement il sera aussi son testament mathématique : il parle encore des solutions de deux questions par les équipollences et après, rompant soudainement, il saute à un nouveau sujet : *« J'espère que vous resterez toujours dans la foi orthodoxe : nier la théorie des parallèles c'est nier toute la géométrie, nier la seule chose dont nous sommes pleinement convaincus : il n'est pas possible de croire qu'il y a des vérités géométriques démontrées rigoureusement et de les admettre comme conséquences nécessaires des définitions : tout dépend de notre connaissance du monde matériel. Nous savons bien peu de chose sur la géométrie à deux dimensions ; très peu sur celle à trois ; voudrions-nous échauffer des théories fantastiques sur une chimère dont nous ne pouvons nous former aucune idée ? »* Au milieu de ces considérations géométriques, s'intercalent, comme dans certaines autres lettres, des considérations sur l'actualité politique ; il parle, comme s'il s'agissait encore de géométrie, des chances d'un Napoléon IV par la volonté du peuple ou d'un Henri V par droit divin ; de la régence de l'Espagnole, de l'ascension au pouvoir d'un Rouher, connu chez nous par son fameux *« Jamais à Rome »* ; des grandes sympathies des Italiens pour la France, de la fortune de l'Italie qui, en grande partie, a été due au caractère et aux paroles de l'empereur d'Autriche, son plus grand ennemi. Selon lui, le grand bien que les Français ont fait à l'Italie *« on ne peut se passer de l'attribuer aux deux Napoléon »* ; il dit que *« Thiers fut toujours hostile aux Italiens »*, etc. C'est ainsi qu'il se reposait des considérations mathématiques ! Même quand il ne s'occupait que de sa science préférée, il ne s'arrêtait jamais sur un même sujet ; mais

il en touchait au contraire plusieurs; comme exemple, je rapporte, en raison de l'intérêt des questions dont il s'agit, les passages suivants d'une lettre que, deux mois seulement avant sa mort, il adressait à M. Laisant :

« ..... J'ai parlé moi aussi des centres harmoniques de plusieurs points par rapport à un point fixe. Par exemple, par rapport à un point  $G$  et à une conique, la polaire est le lieu des centres harmoniques des points d'intersection de cette courbe avec une droite menée par  $G$ , et cela aussi quand les intersections sont représentées par des points imaginaires communs à la droite et à la conique. Peut-être ce théorème pourra-t-il s'appliquer aux courbes d'ordre supérieur au deuxième.

Le théorème cité par M. Collignon (pag. 44) était connu de Newton. L'équipollence  $FM \stackrel{\Omega}{=} \varphi^2 - x + 2\varphi\mathfrak{S}$  représente une parabole (duplicatrice de la droite),  $FA \stackrel{\Omega}{=} -1$  en donne le sommet, et si  $\varphi$  indique le temps, elle exprime le mouvement d'un corps qui tombe (car  $d^2M$  est constant). Le point  $N$ , où la directrice est rencontrée par la normale en  $M$  est donnée par

$$FN \stackrel{\Omega}{=} \varphi^2 - 1 + 2\varphi\mathfrak{S} + (\varphi^2 + 1)(\dot{\varphi}\mathfrak{S} - 1) \stackrel{\Omega}{=} -2 + \varphi(\varphi^2 + 3)\mathfrak{S}.$$

Le point  $S$  donné par  $FS \stackrel{\Omega}{=} \frac{1}{4} FN$  est le centre du cercle  $AFM$ : Newton avait observé que si  $S$  est animé d'un mouvement vers le centre d'attraction  $F$ , en désignant par  $d$  les dérivées par rapport au temps  $t$  donné par  $\varphi^3 + 3\varphi = t$ , on a

$$dM \stackrel{\Omega}{=} 2(\varphi + \mathfrak{S})d\varphi, \quad d^2M \stackrel{\Omega}{=} 2(\varphi + \mathfrak{S})d^2\varphi + 2d\varphi^2,$$

et à cause de

$$3(\varphi^2 + 1)d\varphi = 1, \quad 3(\varphi^2 + 1)d^2\varphi + \mathfrak{S}\varphi d\varphi^2 = 0,$$

on obtient aisément par substitution

$$d^2M \stackrel{\Omega}{=} \frac{2}{9(\varphi^2 + 1)^2} - \frac{4\varphi(\varphi + \mathfrak{S})}{9(\varphi^2 + 1)^2} \stackrel{\Omega}{=} \frac{-2\varphi^3 + 2 - 4\varphi\mathfrak{S}}{9(\varphi^2 + 1)^3} \stackrel{\Omega}{=} -\frac{2}{9} \cdot \frac{FM}{9r^3FM},$$

formule qui représente l'attraction en rapport inverse du carré de la distance  $FM$ . Au moyen du centre mobile on peut aisément marquer sur la parabole la position de  $M$  à chaque instant.

Les recherches de M. Lucas (pag. 25, 35, 36) qui se rapportent aux tissus sont pour moi complètement neuves.

J'avais des doutes sur l'absolue généralité du théorème de Chasles sur les caractéristiques: je verrai très volontiers ce que M. Halphen y a substitué. »

Voici maintenant les trois lettres que M. G. Torelli, comme je l'ai dit plus haut, a bien voulu m'envoyer ; je saisis cette occasion pour lui renouveler mes remerciements.

I. *Aux jeunes mathématiciens appartenant à l'Association des conférences mathématiques ; Naples.*

Vous avez voulu m'agréger à votre Société et je vous ai remercié par une lettre datée du 19 du mois passé ; je voudrais profiter de votre politesse pour venir converser avec vous ; mais pardonnez-vous à un vieillard le tort d'étudier des choses déjà répétées souvent pour vous entretenir de sujets peu intéressants ?

Des formules se présentent fréquemment qui semblent neuves seulement pour avoir été signalées sous une autre forme. J'ai déjà parlé de l'utilité de la considération particulière des coefficients du développement des *potestés* (facultés ou factorielles)

$$[x]^n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$$

en puissances, et réciproquement des puissances en « potestés » : je désigne ces coefficients par la notation  $(n)_r$ , en sorte que j'ai

$$[x]^n = x^n + (n)_1 x^{n-1} + (n)_2 x^{n-2} + \dots,$$

$$x^n = [x]^n - (1-n)_1 [x]^{n-1} + (2-n)_2 [x]^{n-2} - \dots$$

Nous avons par exemple,

$$[x]^3 = x^3 + 3x^2 + 2x,$$

$$[x]^{-3} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = x^{-3} + (-3)_1 x^{-4} + (-3)_2 x^{-5} \dots$$

$$= \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^4} + \frac{25}{x^5} + \frac{90}{x^6} + \dots$$

$$x^3 = [x]^{-3} - 3[x] + x,$$

$$x^{-3} = [x]^{-3} - (4)_1 [x]^{-4} + (5)_2 [x]^{-5} - \dots$$

$$= [x]^{-3} - 6[x]^{-4} + 35[x]^{-5} - 225[x]^{-6} + 1624[x]^{-7} - \dots$$

Voici la table des coefficients  $(n)_r$  qui se calcule par la relation

$$(n+1)_r = (n)_r + n(n)_{r-1} :$$

$n$	$r = 1$	2	3	4	5	6	7	8
-5	15	140	1050	6951	42525			
-4	10	65	350	1701	7770	34105	145750	
-3	6	25	90	301	966	3025	9330	28501
-2	3	7	15	31	63	127	255	511
-1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{120}$	0	$\frac{1}{252}$	0	$-\frac{1}{240}$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{120}$	0	$\frac{1}{252}$	0	$-\frac{1}{240}$
2	1	$-\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{120}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{252}$	$-\frac{1}{240}$
3	3	2	$-\frac{3}{4}$	$\frac{19}{120}$	$-\frac{1}{40}$	$-\frac{4}{315}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{19}{5040}$
4	6	11	6	$-\frac{251}{120}$	$\frac{9}{20}$	$-\frac{221}{2520}$	$-\frac{11}{420}$	$\frac{199}{5040}$
5	10	35	50	24	$-\frac{475}{60}$	$\frac{863}{504}$	$-\frac{95}{252}$	$-\frac{47}{720}$
6	15	85	225	274	120	$-\frac{19087}{504}$	$\frac{1375}{168}$	$-\frac{9829}{5040}$
7	21	175	735	1624	1764	720	$-\frac{5257}{24}$	$\frac{33953}{720}$
8			1960	6769	13132	13068	5040	$-\frac{1070017}{720}$
9					67284	118124	109584	40320

Comme on a

$$(n)_1 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad (n)_2 = \frac{(3n-1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$(n)_3 = \frac{n(n-1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots$$

pour  $r+1 > n > -1$ , on a aussi  $(n)_r = 0$ ; mais si nous supprimons dans ces expressions le facteur qui les annule, nous obtenons d'autres coefficients que je vais indiquer par  $\frac{1}{o}(n)_r$ , et qui sont les termes fractionnaires de la table précédente. Ils se calculent à partir de

$$\frac{1}{o} (1)_2 = \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{o} (1)_4 = \frac{-1}{120}, \quad \frac{1}{o} (1)_6 = \frac{1}{252}, \quad \frac{1}{o} (1)_8 = \frac{-1}{240},$$

$$\frac{1}{o} (1)_{10} = \frac{1}{132}, \quad \frac{1}{o} (1)_{12} = \frac{-691}{32720},$$

et ils dépendent des nombres Bernoulliens.

Ces coefficients donnent bien des développements en série, comme,

$$\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^n = 1 + \frac{(n)_1}{[1 - n]^1} x + \frac{(n)_2}{[1 - n]^2} x^2 + \dots$$

$$+ \frac{(n)_{n-1}}{[1 - n]^{n-1}} x^{n-1} + \frac{(n)_n}{[1 - n]^n} x^n + \frac{(n)_{n+1}}{[1 - n]^{n+1}} x^{n+1} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^n = 1 + \frac{(-n)_1}{[1 + n]^1} x + \frac{(-n)_2}{[1 + n]^2} x^2 + \text{etc.}$$

Par exemple,

$$\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{2 \cdot 1}x^2 - \frac{3}{2 \cdot 1 \cdot 4}x^3 + \frac{19}{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 120}x^4 - \dots$$

$$\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^n = 1 - \frac{(1+n)_1}{[1+n]^1}x + \frac{(2+n)_2}{[1+n]^2}x^2 - \frac{(3+n)_3}{[1+n]^3}x^3 + \dots$$

$$\left(\frac{x}{\log(1+x)}\right)^n = 1 + \frac{(1-n)_1}{[n-1]^1}x + \frac{(2-n)_2}{[n-2]^2}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{(-1)_{n-1}}{[1]^{n-1}}x^{n-1} + \frac{(0)_n}{[0]^n}x^n + \frac{(1)_{n+1}}{[-1]^{n+1}}x^{n+1} + \text{etc.}$$

Il est facile d'apercevoir que  $(n)_r$  est la somme des produits  $r$  à  $r$  des nombres  $1, 2, 3, \dots, n-1$ , et que  $(n)_r$  est la somme des produits  $r$  à  $r$  des nombres égaux ou non  $1, 2, 3, \dots, n$  : à ce propos les notations usitées dans le *Journal de Mathématiques* (de M. Battaglini) sont,

$$S_{r,i} = (i+1)_r, \quad \sigma_{r,i} = (1, 2, 3, \dots, i)^r = (-i)_r.$$

Ainsi la *Quest. 56* du t. IV (page. 344) de cette Revue se réduit à une des formules précédentes : M. Sylvester ajoute que  $(n)_r$  est divisible par chacun des nombres premiers qui sont en même temps  $> (r+1)$ ,  $> (n-r-1)$  et  $< (n-1)$  : il est exact aussi, que  $(-n)_r$  est divisible par tous les nombres premiers qui sont en même temps  $> (r+1)$ ,  $> (n-1)$ , et  $< (n+r-1)$  *Quest. 53, IV, pag. 319*). Par exemple,  $(-5)_3 = 1050$  est divisible par 5 et par 7. Je n'en vois pas la démonstration.

Il n'y a pas lieu ici de parler des nombres Bernoulliens car il est plus opportun de considérer les  $\frac{1}{0}(1)_r$  compris dans la table qui précède, ou bien les  $b_2 = 1$ ,  $b_4 = 2$ ,  $b_6 = 16$ ,  $b_8 = 272$ ,  $b_{10} = 7936$ ,  $b_{12} = 353792$  pour lesquels M. Trudi donne la formule

$$b_{2n} = [1]^{2n-1} - 4\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-3} + \binom{n}{n-5} + \dots$$

Il faudrait rechercher s'il existe une autre formule analogue pour les nombres  $b_3 = 1$ ,  $b_5 = 5$ ,  $b_7 = 61$ ,  $b_9 = 1385$ ,  $b_{11} = 50521$ ,  $b_{13} = 2702765$ , etc.

Entre les nombres  $(n)_r$  existent plusieurs relations : les suivantes sont des cas particuliers :

$$(n)_r - (n)_{r-1}(r-n+1)_1 + (n)_{r-2}(r-n+1)_2 - \dots \pm (r-n+1)_r = n-r]^r ;$$

pour  $n = 5$ ,  $r = 3$  on a,

$$50 - 35 + 10 - 1 = 24 = [2]^3 ;$$

$$(n)_r - (n)_{r-1}(r-n)_1 + (n)_{r-2}(r-n)_2 - \dots \pm (r-n)_r = 0 ;$$

$$50 - 35 \cdot 3 + 10 \cdot 7 - 1 \cdot 15 = 0 ;$$

$$(n)_r - (n-1)_{r-1}(1-n)_1 + (n-2)_{r-2}(2-n)_2 - \dots \pm (r-n)_r = 0 ;$$

$$50 - 11 \cdot 10 + 3 \cdot 25 - 15 = 0 ;$$

la dernière de ces relations est un cas particulier de

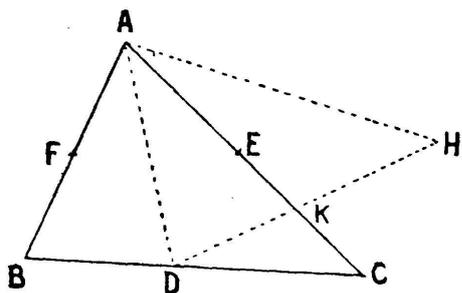
$$\begin{aligned} \frac{(n)_r}{[-n]^r} + \frac{(n)_{r-1}(m+1)_1}{[1-r]^{r-1}[-m]^1} + \frac{(n-2)_{r-1}(m+2)_2}{[2-n]^{r-2}[-m-1]^2} + \dots \\ + \frac{(m+r)_r}{[1-m-r]^r} = \frac{(m+n)_r}{[1-m-n]^r} \end{aligned}$$

qui présente des particularités quand on y comprend quelques-uns des  $\frac{1}{0}(n)_r$ .

Il n'y a pas de doute que la Quest. 48 peut se démontrer aisément ; néanmoins, par la méthode des équipollences expliquée dans mes « *Eléments de Géométrie* » dont j'ai l'honneur de vous envoyer un exemplaire, on peut en donner une démonstration directe et sans autres considérations géométriques que celles qui sont le fondement de la méthode. Si D, E, F sont les milieux des côtés BC, CA, AB, on a,

$$AD \simeq \frac{1}{2} (AB + AC) , \quad BE \simeq \frac{1}{2} (BA + BC) , \quad CF \simeq \frac{1}{2} (CA + CB) ,$$

et il en résulte (car  $AB + BA \underline{\Omega} 0$ , etc.) :



$$AD + BE + CF \underline{\Omega} 0 ,$$

ainsi nous voyons qu'il existe un triangle dont les côtés sont équipollents (c'est-à-dire égaux et parallèles) aux droites  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ . C'est l'un des points fondamentaux de la méthode, que la sur-

face du triangle dont les côtés sont  $AB$ , etc. est donnée par

$$\frac{\mathfrak{S}}{4} (AB \cdot \mathfrak{J}AC - \mathfrak{J}AB \cdot AC) .$$

De même la surface du triangle dont deux côtés sont équipollents à  $DA$ ,  $BE$ , est donnée par

$$\frac{\mathfrak{S}}{4} \left\{ \frac{1}{2} (-AB - AC) \cdot \frac{1}{2} (-\mathfrak{J}AB + \mathfrak{J}BC) + \frac{1}{2} (\mathfrak{J}AB + \mathfrak{J}AC) \cdot \frac{1}{2} (-AB + BC) \right\}$$

$$\underline{\Omega} \frac{\mathfrak{S}}{16} \left\{ (AB + AC)(2\mathfrak{J}AB - \mathfrak{J}AC) + (\mathfrak{J}AB + \mathfrak{J}AC)(AC - 2AB) \right\}$$

$$\underline{\Omega} \frac{\mathfrak{S}}{16} (-\mathfrak{J}AB \cdot \mathfrak{J}AC + 3 \cdot AC \cdot \mathfrak{J}AB) ,$$

dont la surface est les  $\frac{3}{4}$  de celle de  $ABC$ .

Dans le triangle  $ADH$  dont les côtés sont  $AD$ ,  $DH \underline{\Omega} BE$ ,  $HA \underline{\Omega} CF$ , la droite passant par le milieu de  $DH$  est,

$$AK \underline{\Omega} \frac{1}{2}(AD + AH) \underline{\Omega} \frac{1}{2}(AD + CF) \underline{\Omega} \frac{1}{4}(AB + AC + AC + BC) \underline{\Omega} \frac{3}{4}AC ;$$

il en résulte qu'avec les médianes du triangle  $ADH$  on formerait un triangle semblable à  $ABC$ .

Supposons maintenant que plus généralement  $D$  soit un point de  $BC$  donné par  $CD \underline{\Omega} l \cdot CB$ , d'où  $AD \underline{\Omega} l \cdot AB + (1-l)AC$ ; de même soit  $AE \underline{\Omega} m \cdot AD$ ; donc,

$$BE \underline{\Omega} m \cdot BC + (1-m)BA , \quad BF \underline{\Omega} n \cdot BA ,$$

et aussi, comme conséquence,

$$CF \underline{\Omega} n \cdot CA + (1-n)CB .$$

Pour que les trois droites  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  soient équipollentes aux côtés d'un triangle, il faut que  $AD + BE + CF \underline{\Omega} 0$ , c'est-à-dire,

$$l \cdot AB + (1-l)AC + m(AC - AB) + (m-1)AB + n \cdot AC + (1-n)(AB - AC) \underline{\Omega} 0 ,$$

ce qui exige que  $l - m + m - 1 + 1 - n = 0$ ,  $1 - l + m - n - 1 + n = 0$ , ou  $l = m = n$ .

On trouve ensuite par le calcul même, que le triangle qui a des côtés équipollents aux droites AD, BC, CF, a pour surface  $(n^2 + 1 - n) ABC$ . Pour  $n = \frac{1}{2}$  on est dans le cas examiné ci-dessus.

Padoue, 7 juillet 1867.

## II. Aux jeunes mathématiciens appartenant à l'Association des conférences mathématiques ; Naples.

Comme je vous l'ai dit, certaines choses reviennent sous les yeux avec des noms différents : c'est ce qui arrive pour les séries de Moivre et d'Euler. Posant

$$(A) \quad (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = x^n - A_1 x^{n-1} + \dots \pm A_n,$$

les coefficients  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont des fonctions symétriques des  $n$  quantités  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ; et posant

$$(C) \quad \frac{1}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} = x^{-n} + \frac{C_1}{x^{n+1}} + \frac{C_2}{x^{n+2}} + \dots,$$

les termes de la série récurrente  $1, C_1, C_2, \dots$  seront nommés fonctions symétriques *complètes* : par opposition nous nommerons  $A_1, A_2, \dots$  fonctions symétriques *simples*. On établira ainsi une disposition uniforme pour calculer les  $A_1, A_2, \dots, \Sigma a, \Sigma a^2, \dots, C_1, C_2, \dots$ .

Les fonctions symétriques de trois quantités seulement  $c_1 = 10$ ,  $c_2 = 69$ ,  $c_3 = 410$  étant données, on détermine les fonctions simples correspondantes  $A_1, A_2, A_3$  (c'est-à-dire la table de récurrence) en observant que

$$(1 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots)(1 - A_1 t + A_2 t^2 - A_3 t^3) = 1 \quad ;$$

nous écrirons dans une première ligne les nombres  $1, C_1, C_2, C_3$  et, au-dessous, de nouveaux nombres, de manière que dans chaque colonne la somme soit  $= 0$ , et que les nombres de chaque ligne soient proportionnels à ceux de la première ligne : ainsi,

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & + & 10 & + & 69 & + & 410 & + & 2261 & + & 11970 & , \\ & & - & 10 & - & 100 & - & 690 & - & 4100 & - & 22610 & , \\ & & & & + & 31 & + & 310 & + & 2139 & + & 12710 & , \\ & & & & & & - & 30 & - & 300 & - & 2070 & , \end{array}$$

et les nombres de la ligne oblique avec les signes alternés nous donneront les fonctions symétriques simples,  $A_1 = 10$ ,  $A_2 = 31$ ,  $A_3 = 30$ . Ensuite, poursuivant le calcul de la 5<sup>e</sup> colonne nous verrons que le premier nombre sera  $2261 = C_4$ , et après avoir écrit  $- 22610$ , nous trouverons  $11970 = C_5$ , etc.

Quand on connaît les fonctions symétriques simples  $A_1 = 10$ ,  $A_2 = 31$ ,  $A_3 = 30$ , si on demande de déterminer les sommes  $\Sigma a$ ,  $\Sigma a^2$ ,  $\Sigma a^3$ , etc. des puissances des  $a_1, a_2, \dots$ , on écrira dans une *ligne initiale* les nombres  $1, -A_1, +A_2, -A_3, \dots$  qui multipliés par  $0, 1, 2, 3$  formeront la première ligne: les nombres des autres lignes s'écriront de manière que dans chaque colonne la somme soit  $= 0$ , et que les nombres des 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, ... lignes soient proportionnels à ceux de la ligne initiale

$$\begin{array}{r}
 1 - 10 + 31 - 30 \\
 \hline
 - 10 + 63 - 90 \\
 + 10 - 100 + 310 - 300 \\
 \quad + 38 - 380 + 1178 - 1140 \dots \\
 \qquad + 160 - 1600 + 4960 \dots \\
 \qquad \qquad 722 - 7220 \dots \\
 \qquad \qquad \qquad + 3400 \dots \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

les sommes  $\Sigma a = 10$ ,  $\Sigma a^2 = 38$ ,  $\Sigma a^3 = 160, \dots$ , se liront dans la ligne oblique. Cette disposition de calcul montre que, si au contraire, les données étaient les sommes  $\Sigma a, \Sigma a^2, \Sigma a^3, \dots$ , on pourrait aisément retrouver les fonctions symétriques simples  $A_1 = 10, A_2 = 31, A_3 = 30$ .

La même disposition de calcul sert pour passer des fonctions symétriques complètes  $10, 69, 410, 2261, \dots$  aux sommes des puissances,  $10, 38, 160, 722, 3400, \dots$ , et réciproquement. Comme exemple, j'écris dans une ligne oblique les sommes  $10, 38, 160, 722, 3400, \dots$  au-dessus de  $10$  j'écris  $-10$  à cause de la règle ordinaire qui exige que la somme de chaque colonne soit  $= 0$ ; j'écris dans la ligne initiale, après  $1$ , le  $10$  qui est la valeur de  $- 10$  divisé par  $-1$ . Dans la deuxième ligne je pose  $+ 100$ , à cause de l'autre règle, qui veut que les nombres de toutes les lignes, la première exceptée, soient proportionnels à ceux de la ligne initiale: au-dessus de  $+100$  j'écrirai (à cause de la première règle)  $- 138$ , qui divisé par  $- 2$  donnera le nombre  $+ 69$  de la ligne initiale.

$$\begin{array}{r}
 1 + 10 + 69 + 410 + 2261 + \dots \\
 \hline
 - 10 - 138 - 1230 - 9044 - \dots \\
 10 + 100 + 690 + 4100 + \dots \\
 \quad 38 + 380 + 2622 + \dots \\
 \qquad 160 + 1600 + \dots \\
 \qquad \qquad 722 + \dots \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Procédant de la même manière on trouvera toutes les fonctions symétriques complètes de la ligne initiale  $1 + 10 + 69 + \dots$ . Si celles-ci étaient connues, on formerait la ligne initiale en les multipliant par  $0, -1, -2, -3, \dots$ , et par l'algorithme expliqué on aurait les  $\Sigma a = 10, \Sigma a^2 = 38, \Sigma a^3 = 160$ . Ce sont des avertissements élémentaires mais très utiles dans le calcul numérique, et qu'on ne doit jamais négliger.

Dans le cas particulier de  $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_n = n$  les fonctions symétriques simples ou complètes sont les coefficients des puissances d'exposant positif ou négatif développées en puissances, ou,

$$A_1 = (n + 1)_1, \quad A_r = (n + 1)_r, \quad C_1 = (-n)_1, \quad C_r = (-n)_r.$$

Ainsi pour  $n = 3$  (voyez la table précédente), soit de  $A_1 = (4)_1 = 6, (4)_2 = 11, (4)_3 = 6$ ; soit de  $C_1 = (-3)_1 = 6, C_2 = (-3)_2 = 25, C_3 = (-3)_3 = 90$ , on déduira  $\Sigma a = 6, \Sigma a^2 = 14, \Sigma a^3 = 36$ .

$$\begin{array}{r} 1 - 6 + 11 - 6 \\ - 6 + 22 - 18 \\ + 6 - 36 + 66 - 36 \\ + 14 - 84 + 154 \\ + 36 - 216 \\ + 98 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 + 6 + 25 + 90 + 301 \\ - 6 - 50 - 270 - 1204 \\ + 6 + 36 + 150 + 540 \\ + 14 + 84 + 350 \\ + 36 + 216 \\ + 98 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 + 6 + 25 + 90 + 301 + \dots \\ - 6 - 36 - 150 - 540 \dots \\ + 11 + 66 + 275 \dots \\ - 6 - 36 \dots \end{array}$$

La formule (C) et ses analogues donnent dans le cas actuel les relations fondamentales,

$$(-n)_r = (1 - n)_r + n(-n)_{r-1}, \quad (n + 1)_r = (n)_r + n(n)_{r-1}.$$

Les quatre formules dont, dans la lettre précédente, j'ai donné des cas particuliers, sont

$$(1) \quad \frac{(n)_r}{[1-n]^r} + \frac{(n)_{r-1}(m)_1}{[1-n]^{r-1}[1-m]^1} + \frac{(n)_{r-2}(m)_2}{[1-n]^{r-2}[1-m]^2} + \dots + \frac{(m)_r}{[1-m]^r} = \frac{(m+n)_r}{[1-m+n]^r},$$

$$(2) \quad \frac{(n)_r}{[1-n]^r} + \frac{(n-1)_{r-1}(m)_1}{[1-n]^{r-1}[-m]^1} + \dots + \frac{(m)_r}{[-m]^r} = \frac{(m+n)_r}{[-m-n]^r},$$

$$(3) \quad \frac{(n)_r}{[-n]^r} + \frac{(n-1)_{r-1}(m+1)_1}{[1-n]^{r-1}[-m-1]^1} + \frac{(n-2)_{r-2}(m+2)_2}{[2-n]^{r-2}[-m-1]^2} + \dots + \frac{(m+r)_r}{[-m-r]^r} = \frac{(m+n)_r}{[-m-n]^r},$$

$$(4) \quad \frac{(n)_r}{[-n]^r} + \frac{(n-1)_{r-1}(m+1)_1}{[1-n]^{r-1}[-m]^1} + \frac{(n-2)_{r-2}(m+2)_2}{[2-n]^{r-2}[-m-1]^2} + \dots + \frac{(m+r)_r}{[1-m-r]^r} = \frac{(m+n)_r}{[1-m-n]^r};$$

elles donnent quatre expressions différentes de  $(m + n)_r$ .

Si dans (1) on pose  $m = -1$  et si on change  $n$  en  $1 - n$ , on a une formule, donnée par M. Torelli;

$$\frac{(1-n)_r}{[n]^r} + \frac{(1-n)_{r-1}}{[n]^{r-2} \cdot 2} + \frac{(1-n)_{r-2}}{[n]^{r-2} \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{[2]^r} = \frac{(-n)_r}{[1+n]^r}$$

Au moyen de la relation

$$[t+a]^n = [t]^n + n[t]^{n-1}a + \binom{(2)}{n}[t]^{n-2}[a]^2 + \dots + [a]^n,$$

(le symbole  $\binom{(2)}{n}$  équivaut à  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  etc.) on aura :

$$[t+a]^n = [t]^n + (n)_1 + na)t^{n-1} + ((n)_2 + n(n-1)_1a + \binom{(2)}{n}[a]^2)t^{n-2} + ((n)_3 + n(n-1)_2a + \binom{(2)}{n}(n-2)_2[a]^2 + \binom{(3)}{n}[a]^3)t^{n-3} + \dots$$

formule qui nous donne l'expression de chaque fonction symétrique simple des  $n$  quantités  $a, a+1, a+2, \dots, a+n-1$ , au moyen des potestés des  $(a)$ : si on développe ces potestés en puissances, on obtient au moyen de (3), les expressions des fonctions symétriques des puissances des  $a$ , c'est-à-dire,

$$[t+a]^n = t^n + \{(n)_1 + na\}t^{n-1} + \{(n)_2 + (n-1)(n)_1a + \binom{(2)}{n}a^2\}t^{n-2} + \{(n)_3 + (n-2)(n)_2a + \binom{(2)}{n-1}\{(n)_1a^2 + \binom{(3)}{n}a^3\}t^{n-3} + \{(n)_4 + (n-3)(n)_3a + \binom{(2)}{n-2}(n)_2a^2 + \binom{(3)}{n-1}n_1a^3 + \binom{(4)}{n}a^4\}t^{n-4} + \dots$$

Ces dernières expressions contiennent, en outre des coefficients binômes  $\binom{(i)}{n} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i}$ , les seules fonctions simples  $(n)_r$  des  $(n-1)$  quantités  $1, 2, 3, \dots, n-1$ .

Je pense que de cette manière on pourra démontrer les expressions des fonctions symétriques complètes des  $a, a+1, a+2, \dots$

Il resterait à démontrer plusieurs autres relations entre les coefficients  $(n)_r$ , comme,

$$(n)_r + (n)_{r-1}(r-n+1) + (n)_{r-2}(r-n+1)_2 + \dots + (r-n+1)_r = \frac{[1-n]^r [1-n]^r}{[1]^r};$$

$$(n)_r - (n)_{r-1}(-n)_1 + (n)_{r-2}(-n)_2 - \dots \pm (-n)_r = [-n]^r;$$

$$(n)_r - (n-1)_{r-1}(2-n)_1 + (n-2)_{r-2}(3-n)_2 - \dots \pm (r+1-n)_r = \binom{(r)}{n-1}.$$

Si dans la première de ces relations nous faisons  $n = 3, r = 6$ ,

tous les termes seront nuls, mais si nous supprimons le facteur qui les annule, nous obtiendrons encore (consultez la table de la lettre précédente pour les valeurs

$$\frac{1}{o}(3)_6 = \frac{-4}{315}, \quad \frac{1}{o}(3)_5 = \frac{-1}{40}, \quad \frac{1}{o}(3)_4 = \frac{19}{120}, \quad \frac{1}{o}(3)_3 = \frac{-3}{4}, \quad (3)_2 = 2, \\ (3)_1 = 3, \quad (4)_1 = 6, \quad (4)_2 = 11, \quad (4)_3 = 6, \quad \frac{1}{o}(4)_4 = \frac{-251}{120}, \\ \left. \frac{1}{o}(4)_5 = \frac{9}{20}, \quad \frac{1}{o}(4)_6 = \frac{-221}{2520} \right):$$

$$\frac{-4}{315} + \frac{-1}{40} \cdot 6 + \frac{19}{120} \cdot 11 + \frac{-3}{4} \cdot 6 - 2 \cdot \frac{-251}{120} - 3 \cdot \frac{9}{20} - \frac{-221}{2520} = 0,$$

ayant eu soin de changer de signes les trois derniers termes qui contiennent le facteur nul dans le deuxième facteur  $(r - n + 1)_s$  avant de faire ce changement dans le premier  $(n)_{r-s}$ . On pourra consulter à ce propos une note que j'ai insérée dans les « *Annales de M. Tortolini* », t. IV, pag. 108, Rome, 1853.

Padoue, 15 juillet 1867.

### III. A M. Gabriel Torelli, Naples.

Padoue, 2 septembre 1867.

Mon ami très estimé,

La meilleure marche à suivre pour maintenir la correspondance c'est de répondre aussitôt qu'on a lu la demande: c'est ce que je vais faire pour vous démontrer au moins par mon empressement le plaisir que j'éprouve à entretenir avec vous et les autres jeunes mathématiciens de l'Association une libre correspondance scientifique.

Sans le démontrer ici, il est certain que la formule qui donne  $(n)_r$  contient au numérateur les facteurs  $n(n-1)(n-2)\dots(n-r)$ , et vous l'observez aussi en disant que  $(n)_r$  est divisible par

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{1 \cdot 2 \dots (r+1)}$$

D'ailleurs, même sans recourir à cette formule, nous avons une infinité de manières de calculer les Bernoulliens, et de ceux-ci dépend la première ligne de la table de ma première lettre, car,

$$\frac{1}{o}(o)_r = rB_{r-1} \dots$$

La première ligne étant écrite, les autres s'en déduisent au moyen de la relation

$$n(n)_r + (n)_{r+1} = (n+1)_{r+1} .$$

Le meilleur titre des Bernoulliens est celui d'être vieux, car les coefficients  $\frac{1}{0}(0)_r = \frac{1}{0}(1)_r$  font partie d'une table bien plus utile.

Par exemple, les coefficients de  $\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^3$  se trouvent dans la ligne

$$3 , \quad 2 , \quad \left| \quad -\frac{3}{4} , \quad \frac{19}{120} , \quad -\frac{1}{140} , \quad \dots \right.$$

Les trois premiers termes du développement sont

$$1 + \frac{(3)_1}{[-2]^1}x + \frac{(3)_2}{[-2]^2}x^2 = 1 + \frac{3}{-2}x + \frac{2}{2 \cdot 1}x^2 :$$

le numérateur  $(3)_3$  s'annule; mais comme dans le dénominateur nous avons les facteurs  $(-2)(-1)(0)$ , en supprimant haut et bas le 0, il reste,

$$\frac{\frac{1}{0}(3)_3}{(-2)(-1)}x^3 = \frac{-\frac{3}{4}}{2}x^3 ,$$

et, continuant, on a,

$$\frac{\frac{1}{0}(3)_4}{(-2)(-1)(1)}x^4 = \frac{19}{2}x^4 , \text{ et encore, } \frac{\frac{1}{0}(3)_5}{(-2)(-1)1 \cdot 2}x^5 = \frac{-\frac{1}{40}}{2 \cdot 2}x^5 , \text{ etc.}$$

Ce passage des  $(n)_r$  aux  $\frac{1}{0}(n)_r$  se présente dans les développements de  $\left(\frac{x}{\log(1+x)}\right)^n$  pour  $(n)$  entier et positif.

Possédant les tables des  $(n)_r$  et des  $\frac{1}{0}(n)_r$ , on a des occasions très fréquentes de les employer. Du reste ces développements sont connus.

La formule que vous écrivez

$$\frac{1}{0}(r)_{r+n} = (r)_{r-1} \frac{Bn}{n+1} ,$$

se réduit à

$$\frac{1}{0}(r)_{r+n} = (r)_{r-1} \frac{1}{0}(1)_n + (r)_{r-2} \frac{1}{0}(1)_{n+1} + \dots$$

On a par exemple

$$\frac{1}{0}(3)_4 = (3)_2 \frac{1}{0}(1)_1 + (3)_1 \frac{1}{0}(1)_2 + \frac{1}{0}(1)_3 = \frac{-2}{2} + \frac{3}{12} .$$

Il y a certainement un grand nombre de relations de ce genre. J'ai vu dans votre Mémoire la démonstration que je demandais : je vous fais observer que  $(-4)_2 = 65$  n'est pas divisible par  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$  et par conséquent  $(-n)_r$  n'est pas divisible par

$$\frac{(n+r)(n+r-1) \dots (n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+1)} .$$

Je ne peux pas comprendre que pour l'étude de la mathématique, on pense, en Italie, à abandonner Naples, où on trouve aussi une école d'Ingénieurs. Naples est pour la mathématique le Paris de l'Italie. L'Institut technique de Milan me paraît bon et je ne peux penser qu'on cherche à le supprimer ou à le réduire. Celui de Turin sera bon, et peut-être pour un jeune homme sera-t-il plus approprié que celui de Milan ; mais mon opinion est lancée avec peu de fondement et vous ne devez pas en tenir compte. Je le répète, pour étudier les mathématiques, le meilleur est de rester à Naples.

... Votre bien dévoué

G. Bellavitis.

Ces quelques lettres que j'ai reproduites presque intégralement montrent suffisamment combien est intéressante la correspondance de ce savant et fécond mathématicien qui s'est appelé *Giusto Bellavitis*.

C. ALASIA (Tempio).