

# CONSÉQUENCES DIVERSES D'UNE FORMULE D'ALGÈBRE LEURS INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUES

Autor(en): **Stuyvaert, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-9271>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# CONSÉQUENCES DIVERSES D'UNE FORMULE D'ALGÈBRE

## LEURS INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUES

---

M. F. MEYER a fait, à la section de pédagogie du Congrès de Heidelberg, en 1904, une très intéressante communication (*Ueber das Wesen mathematischer Beweise*), dont l'idée fondamentale est la suivante : l'accroissement des connaissances mathématiques réside souvent dans un nouvel arrangement de choses déjà connues. Parmi les exemples nombreux et très instructifs qu'il donne, nous avons remarqué celui qui concerne le *théorème de Ptolémée*, au sujet duquel nous avons eu il y a longtemps des idées analogues ; nous nous permettons de développer ici ces idées parce qu'elles diffèrent de celles de M. F. MEYER par le point de départ et la direction.

M. F. MEYER a eu le bon goût de ne pas pousser son système jusqu'à la formule paradoxale : *tout est dans tout*. Son travail d'ailleurs prouve assez qu'il peut y avoir du nouveau en mathématiques ; et il est surtout important au point de vue de la pédagogie. Rien n'est plus utile, pour donner de l'unité et de la continuité à l'enseignement, et pour soulager la mémoire des élèves, que de rapprocher les théories nouvelles, ou présentées comme telles, de toutes les vérités antérieures qui s'y rattachent.

Le théorème d'algèbre d'où nous partons est le suivant.

Si  $f(x) = 0$  est une équation de degré  $n$  ayant l'unité pour coefficient du terme  $x^n$  et dont les racines  $a, b, c, \dots k$  sont distinctes ; si en outre  $F(x) = Px^{n-1} + \dots$  est un polynôme entier de degré  $n - 1$ , on a la relation

$$(1) \quad \sum \frac{F(x)}{f'(x)} = P,$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les racines de  $f(x) = 0$ .  
Si  $F(x)$  est de degré inférieur à  $n - 1$ , on a

$$(2) \quad \sum \frac{F(x)}{f'(x)} = 0$$

et, en particulier, on a toujours

$$(3) \quad \sum \frac{1}{f'(x)} = 0.$$

La démonstration n'est pas bien difficile (voir par exemple SERRET, *Algèbre supérieure*); mais encore elle suppose la notion de dérivée d'un polynome entier. Supposons le théorème établi, peu importe de quelle manière; nous le rattacherons plus tard à des notions très élémentaires.

A présent, on a

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - k),$$

d'où successivement,

$$f'(x) = (x - b)(x - c) \dots (x - k) + (x - a)(x - c) \dots (x - k) + \dots$$

$$f'(a) = (a - b)(a - c) \dots (a - k)$$

etc.

L'équation (3) conduit alors à l'énoncé :

*Etant donnés n nombres différents, si l'on retranche de chacun d'eux les n - 1 autres, les inverses des produits de ces différences ont une somme nulle.*

Dans les égalités (1) et (2), si l'on suppose  $P = 1$  et si l'on appelle  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, x$  les racines de  $F(x) = 0$  on obtient les énoncés suivants.

*Etant donnés n nombres différents a, b, c, ... k et n - 1 nombres, différents ou non,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, x$ ; si de l'un quelconque h des nombres de la première série on soustrait tous les autres et qu'on multiplie les restes entre eux; si du même nombre h, on soustrait tous les nombres de la seconde série et qu'on multiplie les restes entre eux; les fractions ayant pour dénominateur le premier produit et pour numérateur le second ont une somme égale à l'unité. Cette somme est nulle si les quantités  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, x$  sont en nombre plus petit que n - 1.*

Si sur une droite on a  $n$  points A, B, C... K dont les abscisses, à partir d'une origine commune, sont  $a, b, c, \dots, k$ , on a, en grandeur et en signe,

$$BA = a - b .$$

D'après ce qui précède, les inverses des produits des segments de la droite ayant pour extrémité un des points et pour origine les  $n-1$  autres ont une somme algébrique nulle.

Il en est de même si dans la fraction ayant pour dénominateur AH. BH. CH,... KH on remplace au numérateur l'unité par le produit des segments MH. NH...., M, N,... étant des points, distincts ou confondus, de la droite, en nombre moindre que  $n-1$ . Si ces points M, N,... sont en nombre  $n-1$  la somme des fractions est égale à l'unité.

Il va sans dire que les points peuvent être pris sur une courbe pourvu que leurs distances respectives soient mesurées le long de cette courbe.

Si la première série comprend trois points, on a

$$(4) \quad \frac{1}{BA \cdot CA} + \frac{1}{AB \cdot CB} + \frac{1}{AC \cdot BC} = 0 ,$$

ou

$$BC + CA + AB = 0 ,$$

$$(5) \quad \frac{DA}{BA \cdot CA} + \frac{DB}{AB \cdot CB} + \frac{DC}{AC \cdot BC} = 0 ,$$

ou

$$DA \cdot BC + DB \cdot CA + DC \cdot AB = 0 ,$$

$$(6) \quad \frac{DA \cdot EA}{BA \cdot CA} + \frac{DB \cdot EB}{AB \cdot CB} + \frac{DC \cdot EC}{AC \cdot BC} = 1 ,$$

$$(7) \quad \frac{\overline{DA}^2}{BA \cdot CA} + \frac{\overline{DB}^2}{AB \cdot CB} + \frac{\overline{DC}^2}{AC \cdot BC} = 1 .$$

La relation (5) est connue sous le nom d'*Identité de Pappus*; elle est identique comme forme à celle qui traduit le *Théorème de Ptolémée* suivant lequel le produit des diagonales d'un quadrilatère inscrit est égal à la somme des produits des côtés opposés du quadrilatère. M. F. MEYER a montré, et nous ferons voir aussi, que l'analogie de ces deux propositions n'est pas seulement formelle.

Si dans les dénominateurs des fractions doivent figurer quatre lettres A, B, C, D, on a une série d'identités dont voici un exemple

$$\frac{1}{BA \cdot CA \cdot DA} + \frac{1}{AB \cdot CB \cdot DB} + \frac{1}{AC \cdot BC \cdot DC} + \frac{1}{AD \cdot BD \cdot CD} + 0,$$

d'où après quelques transformations,

$$(8) \quad \frac{BD}{AC} = \frac{AB \cdot BC + AD \cdot CD}{AB \cdot AD + BC \cdot CD}.$$

Cette relation entre quatre points en ligne droite s'écrit comme la relation donnant le rapport des diagonales du quadrilatère inscrit dans un cercle ; pour abréger nous appellerons cette identité le *rapport des diagonales*.

En faisant figurer aux dénominateurs des fractions 5 lettres, 6 lettres, etc. on peut écrire des identités en nombre indéfini. Mais toutes doivent être des combinaisons d'identités du type (4).

En effet, soient pour fixer les idées,  $x_1, x_2, x_3$  les distances de trois points d'une droite à un quatrième et  $a, b$  les distances du premier au second et au troisième, de sorte que l'on ait par exemple

$$\begin{aligned} x_1 &= a + x_2, \\ x_1 &= b + x_3. \end{aligned}$$

Si l'on pouvait avoir une troisième identité entre ces cinq distances, qui ne fût pas une conséquence des deux relations écrites, les quantités  $x_1, x_2, x_3$  seraient déterminées, ce qui est absurde puisque le quatrième point est quelconque.

Ainsi se trouve ramené à des opérations d'une extrême simplicité, et conformément aux vues de M. F. MEYER, le théorème d'algèbre signalé au début de notre travail.

Par exemple l'*identité de Pappus* se démontre en multipliant membre à membre les identités

$$AC = AB + BC, \quad DA = DC + CA,$$

et en opérant une petite transformation dans le résultat ; on pourrait s'exercer à construire de la même manière les autres identités.

Le *théorème de Ptolémée* relatif au quadrilatère inscrit, et le *théorème du rapport des diagonales*, si on les suppose établis, d'une façon quelconque pour un cercle de rayon  $r$ , restent vrais lorsque ce rayon croit indéfiniment et par suite existent pour des segments d'une droite. Inversement les identités (5) et (8) ayant été démontrées pour des points en ligne droite, on peut en déduire les propriétés du quadrilatère inscrit, soit par les formules trigonométriques qu'utilise M. F. MEYER, soit par le procédé un peu différent que voici.

Les formules (5) et (8) s'appliquent à des arcs de cercle comptés dans un même sens, et, comme elles sont homogènes, aux moitiés de ces arcs, si donc on les démontre pour les sinus de ces moitiés, elles seront établies pour les cordes des arcs.

En posant

$$\text{arc AB} = 2\alpha, \quad \text{BC} = 2\beta, \quad \text{CD} = 2\gamma,$$

d'où

$$\text{arc AC} = 2(\alpha + \beta), \quad \text{AD} = 2(\alpha + \beta + \gamma), \quad \text{BD} = 2(\beta + \gamma),$$

la démonstration consiste à établir les identités suivantes

$$\sin \alpha \sin \gamma + \sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma),$$

$$\frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \sin \beta + \sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin \gamma}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin \beta \sin \gamma},$$

dont la vérification directe n'est pas bien pénible.

Comme nous l'avons dit pour le *théorème de Ptolémée* et le *rapport des diagonales*, toute relation existant toujours entre cordes d'un cercle est vraie aussi pour les arcs soutendus comptés dans le même sens et par suite pour des points en ligne droite. Mais la réciproque n'est pas vraie, par exemple la relation

$$AB + BC + CA = 0,$$

vraie pour trois points en ligne droite, ne l'est plus pour trois cordes. On peut rechercher un moyen, autre que celui des formules trigonométriques ci-dessus, de transporter sur le cercle les formules existant entre points en ligne droite et de

distinguer lesquelles de ces formules se transportent sans altération. Une communication verbale de M. DEMOULIN nous a suggéré l'idée d'essayer la méthode par rayons vecteurs réciproques.

Soit  $d$  une droite ayant pour transformée un cercle  $c$ , soient  $k^2$  la puissance de l'inversion et  $P$  le pôle situé sur la circonférence  $c$ ;  $M, M'$  et  $N, N'$  étant deux couples de points correspondants, savoir  $M$  et  $N$  sur la droite et  $M', N'$  sur le cercle, les triangles semblables  $PMN, PN'M'$  donnent

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{PM}{PN'} \frac{PM \cdot PN}{k^2} = \frac{k^2}{PM' \cdot PN'}$$

d'où

$$MN = M'N' \frac{PM \cdot PN}{k^2} = M'N' \frac{k^2}{PM' \cdot PN'}$$

Si le segment  $MN$  intervient dans une des identités étudiées ci-dessus, identité que l'on peut écrire en abrégé

$$(9) \quad \sum \pi(MN) = 0,$$

et où l'on suppose que tous les segments tels que  $MN$  soient orientés dans le même sens, on pourra remplacer  $MN$  par sa valeur en fonction de  $M'N'$  et faire sortir les facteurs  $k$  à cause de l'homogénéité; on aura

$$(10) \quad \sum \pi(M'N' \cdot PM \cdot PN) = \sum \pi\left(\frac{M'N'}{PM' \cdot PN'}\right) = 0.$$

Pour que la relation (9) entre segments  $MN$  de droite, se transforme en la même relation entre cordes  $M'N'$ , il faut que dans tous les termes de l'identité (10), le produit  $PM \cdot PN \dots$  soit le même, ou que, dans la relation (9) chaque lettre  $M, N, \dots$  intervienne le même nombre de fois dans chaque terme.

Or une relation du type (4)

$$\frac{1}{BA \cdot CA \dots} + \dots = 0$$

ne peut satisfaire à cette condition puisque, après cette disparition des dénominateurs,  $A$  ne figure pas dans le premier terme.

Une relation du type (5) ou (6),

$$\frac{HA \cdot IA \dots}{BA \cdot CA \dots} + \dots = 0 .$$

renferme H une fois dans chaque terme, donc doit aussi contenir A une fois dans chaque terme, ce qui exige que chaque numérateur n'ait qu'un segment ; alors les termes à partir du second ont A une fois au dénominateur ; comme, après disparition des dénominateurs. A doit figurer une fois au numérateur, il s'ensuit que les lettres B, C, ... doivent être au nombre de deux et la seule relation de ce type qui se transporte sans altération par vecteurs réciproques est l'identité de Pappus.

Il faut encore considérer les identités du type (7),

$$\frac{(HA)^r (IA)^s \dots}{BA \cdot CA \dots} + \dots = 0 ;$$

on voit comme plus haut que l'on ne peut avoir qu'une des lettres H, I, ... au numérateur et que les lettres B, C, ... doivent être en nombre  $r+1$  ; donc toutes les relations telles que

$$(11) \quad \frac{(HA)^r}{BA \cdot CA \dots} + \dots = 0 ,$$

où les lettres A, B, C, ... sont en nombre  $r+2$  se transportent sans changement sur le cercle par rayons vecteurs réciproques ; la plus simple de ces identités est

$$(12) \quad (HA)^2 BC \cdot BD \cdot CD - (HB)^2 AC \cdot AD \cdot CD + (HC)^2 AB \cdot AD \cdot BD \\ - (HD)^2 AB \cdot BC \cdot AC = 0 .$$

Chose curieuse, l'identité du rapport des diagonales, bien qu'elle soit vraie pour la droite et pour les cordes du cercle, ne se transporte pas directement par vecteurs réciproques. C'est qu'il y a des relations qui se transforment sur le cercle en d'autres, où intervient le pôle de la transformation, ou en d'autres où ce pôle n'intervient pas mais où il a une relation particulière avec la droite.

C'est ainsi que la relation

$$BA + AC + CB = 0$$

se transforme dans l'identité du *théorème de Ptolémée* pour le quadrilatère PA'B'C' et c'est même, comme nous le fait observer M. DEMOULIN, une démonstration connue et très simple de ce *théorème*, surtout si l'on a aussi en vue la réciproque.

De même ce sera la relation (12), qui, moyennant une position spéciale de P, nous donnera le *rapport des diagonales* dans le cercle. Elevons, au point H de la droite ABCDH, une perpendiculaire de longueur quelconque HP et prenons l'extrémité P pour pôle de l'inversion; nous aurons sur la droite, la relation (8) qui peut s'écrire en abrégé

$$(13) \quad BC \cdot BD \cdot CD + \dots = 0;$$

en la multipliant par  $(HP)^2$  et en ajoutant la relation (12), on obtient, à cause des triangles rectangles HPA, HPB...,

$$(PA)^2 BC \cdot BD \cdot CD + \dots = 0.$$

Appliquons l'inversion :

$$(PA)^2 \cdot B'C' \cdot B'D' \cdot C'D' \cdot (PB)^2 (PC)^2 (PD)^2 + \dots = 0.$$

A cause du facteur  $(PA)^2 (PB)^2 (PC)^2 (PD)^2$  commun à tous les termes on obtient la relation

$$B'C' \cdot B'D' \cdot C'D' + \dots = 0,$$

qui est précisément le *rapport des diagonales* dans le cercle,

M. F. MEYER remarque que l'identité de Pappus est la même que l'identité entre coordonnées plückériennes d'une droite de l'espace et l'identité entre deux valeurs du rapport anharmonique de quatre points. On peut ajouter que l'identité de Pappus, et quelques autres relations signalées ci-dessus, conduisent à des identités entre déterminants à deux lignes, identités utiles dans la théorie des formes binaires.

En effet, rapportons les points de la droite AB à deux origines ou points fondamentaux O, O' et appelons comme d'habitude coordonnées d'un point A deux quantités proportionnelles aux segments OA et OA' multipliées par des constantes arbitraires mais fixes; de sorte que si  $a_1, a_2$  sont les coordonnées de A,  $b_1$  et  $b_2$  celles de B, etc., on a

$$\begin{aligned} \rho a_1 &= h \cdot OA, & \rho' b_1 &= h \cdot OB \\ \rho a_2 &= k \cdot AO', & \rho' b_2 &= k \cdot BO', \end{aligned} \quad \text{etc.,}$$

$h$  et  $k$  étant deux constantes fixes pour tous les points de la droite, tandis que  $\rho, \rho', \dots$  peuvent varier d'un point à l'autre. On prouve alors facilement que l'on a

$$AB = \frac{\rho\rho'}{hk.OO'} (a_1b_2 - a_2b_1) = \frac{\rho\rho'}{hk.OO'} (ab) .$$

En substituant dans l'identité de Pappus qui contient chaque lettre A, B, C, D une fois dans chaque terme, on fait disparaître le facteur commun  $\rho\rho'\rho''\rho'''$  et l'on a l'identité fondamentale de la théorie des formes binaires,

$$(da)(bc) + (db)(ca) + (dc)(ab) = 0 .$$

Mais toutes les identités du type (11) ont chaque lettre le même nombre de fois dans chaque terme et fournissent donc des identités analogues entre déterminants à deux lignes.

Ainsi toute identité entre points en ligne droite qui se transporte sur le cercle par vecteurs réciproques donne aussi une identité entre déterminants à deux lignes.

M. STUYVAERT (Gand).

## DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE CORIOLIS

1.  $\bar{v}_a, \bar{v}_r$  et  $\bar{v}_e$  représentant les vitesses absolue, relative et d'entraînement d'un point mobile, on a

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r ,$$

et, le signe D indiquant la dérivée géométrique prise dans l'observatoire absolu :

$$D\bar{v}_a = D\bar{v}_e + D\bar{v}_r .$$

Il reste à chercher les significations des trois termes compris dans cette égalité.

2.  $D\bar{v}_a$  est l'accélération absolue  $\bar{j}_a$  du mobile.