IV. — Rotations relatives autour d'axes quelconques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

l'angle α, soit l la longueur de l'arc de ce petit cercle intercepté, si r est le rayon de la sphère, on a :

$$\frac{l}{R(r)} = \sin\left(\frac{AP}{R(r)}\right)\alpha .$$

Si les rayons AP et PB deviennent infiniment petits on pourra donc écrire en vertu des résultats déjà acquis :

$$\text{Lim}\ \frac{l}{\text{corde AP}} = \alpha .$$

Or si on projette la figure sur le plan du petit cercle, si P′A est la projection de la corde AP, on a :

$$\text{Lim}\ \frac{\text{corde PA}}{P'A} = 1 , \quad \text{donc aussi,} \quad \text{Lim}\ \frac{l}{P'A} = \alpha ;$$

or

$$l = H(P'A) . \alpha . m' ,$$

et comme $\frac{H(P'A)}{PA'}$ a pour limite 1 quand P′A tend vers zéro, on a

$$\text{Lim}\ \frac{l}{P'A} = \alpha . m' ,$$

d'où, en comparant les deux limites de $\frac{l}{P'A}$, on conclut $m' = 1$.

Remarque. — Dans la géométrie de la droite ouverte et dans un triangle plan qui a deux côtés infiniments petits le déficit de la somme des angles à 2 angles droits est infiniment petit.

IV. — **Rotations relatives autour d'axes quelconques.**

L'étude déjà faite d'un système de rotations relatives autour d'axes concourants fournit un lemme important qui nous permettra d'aller plus loin.

Lemme Fondamental. — Soient U_1 et U_2 deux droites actuellement données et ne se coupant pas ; considérons un premier corps solide S_1 animé d'une rotation uniforme de vitesse angulaire ω_1 autour de U_1, considérons la droite Δ_2 de ce solide qui coïncidait avec U_2 à l'époque t, et envisageons par rapport au solide S_1 un second solide S_2 tournant sur S_1 avec une vitesse angulaire constante ω_2 ; soit un certain point du solide S_2, défini par sa position A à l'époque t; à l'époque t ce point coïncide avec un certain point du solide S_1 qui à l'époque t' sera venu en B, si on donne alors au point B la rotation relative qu'il doit éprouver autour de la position de Δ_2 à l'époque t' avec vitesse angulaire ω_2 le point B vient en C; C sera la position à l'époque t' occupée par le point du solide S_2 qui était en A à l'époque t.

Dautre part, considérons le vecteur issu de A qui représente la vitesse linéaire due à une rotation de vitesse angulaire ω_1 autour de U_1; considérons encore le vecteur issu de B qui représente la vitesse linéaire *qu'aurait* le point A s'il tournait autour de U_2 avec la vitesse angulaire ω_2; formons le vecteur *résultant* de ces deux vecteurs concourants et multiplions le par la durée $t' - t$, nous obtenons ainsi un vecteur A D; *je dis que l'extrémité D de ce vecteur sera séparée du point C par un écart infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre de $t' - t$.*

Démonstration. — Observons d'abord que si Ω_3 est le vecteur résultant de deux vecteurs concourants en O, Ω_1 et Ω_2 et que si M est un point de la perpendiculaire élevée de M au plan des trois vecteurs Ω la vitesse v_3 de M due à la rotation Ω_3 sera un vecteur égal au vecteur résultant des deux vecteurs v_1 et v_2 qui représenteraient les vitesses linéaires qui seraient dues aux rotations isolées Ω_1 et Ω_2. (Conséquence des résultats déjà acquis et de l'invariance de l'opération vectorielle; soit alors $dt = t' - t$ une durée infiniment petite; du mode d'équivalence des vecteurs concourants interprétés par des vitesses de rotation on conclut que le vecteur $V_3\, dt$ est la limite de la droite qui ferme le contour de deux vecteurs successifs MN et NN', lorsque ce contour se modifie à tout instant de la durée dt de la manière suivante:

N est la position occupée à l'époque $t + dt$ par un point de S_1 qui était en M à l'époque t; le segment NN' est la corde d'un déplacement relatif de S_2 par rapport à S_1, et tournant autour d'une droite Δ_2. Cette corde variable est-elle même entraînée avec le solide S_1 pendant que le point de départ N de cette corde décrit d'un mouvement continu l'arc dont M N est la corde dans la rotation Ω_1; or pendant le déplacement de S_1 nous pouvons envisager les segments NM et NN′ comme issus du point mobile N et *repérés* par rapport à un trièdre de sommet N et qui serait invariablement lié au solide S_1 ; or la droite NM issue de N et ainsi *repérée* TEND vers une droite déterminée de S_1 qui est la tangente en N à l'arc M N, et de même la droite NN′ issue de N et ainsi repèrée tend vers une droite déterminée de S_1 perpendiculaire au plan de N et de la droite Δ_2 qui à l'époque t porte Ω_2 ; ces deux droites limites coïncident d'ailleurs à l'époque t avec les vecteurs distincts V_1 et $-V_2$; on conclut de là aisément par nos lemmes de continuité que :

1. le plan MNM′ qui pivote sur M fait un angle infiniment petit avec le plan des vecteurs V_1 et V_2 ;

2. l'angle que fait la droite $\overrightarrow{NN'}$ avec le vecteur $\overrightarrow{NM}$ est infiniment peu différent du supplément de l'angle de V_2 et de V_1 ;

3. l'écart entre le point N′ et l'extrémité du vecteur $V_3\, dt$ est infiniment petit du second ordre ;

4. l'extrémité du vecteur $V_3\, dt$ et le point où vient l'extrémité du vecteur $V_2\, dt$ par une translation $V_1\, dt$ d'axe V_1 sont séparés par un écart infiniment petit du second ordre.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du lemme.

Nous prendrons comme vecteurs V_1 et V_2 les vitesses linéaires dues aux rotations isolées ω_1 sur U_1 et ω_2 sur U_2.

Ces vecteurs V_1 et V_2 peuvent être réalisés comme vitesses linéaires dues à deux rotations concourantes Ω_1 et Ω_2 en un point O de la perpendiculaire élevée de M au plan de V_1 et de V_2. D'autre part en considérant les positions relatives de S_1 tournant autour de U_1 puis de δ_2 tournant autour de Δ_2 nous voyons que les cordes $M\nu$ et $\nu\nu'$ de ces deux déplacements relatifs peuvent encore être repèrées par rapport à un trièdre de sommet ν lié au solide S_1, or bien que ce contour variable $M\nu\nu'$ soit différent du contour variable MNN′ envisagé tout à l'heure, il possède, dans ses déplacements de pivotement sur ν dans S_1, et de pivotement sur M dans l'espace fixe, les propriétés suivantes :

1. la droite $M\nu$ pivotant sur M tend vers la droite du vecteur V_1 ;

2. La corde $\nu\nu'$ pivotant sur ν dans S_1 tend vers une droite de S_1 qui à l'époque t est dirigée suivant la droite qui porte le vecteur V_2 ;

3. enfin par les lemmes de continuité le plan de contour $M\nu\nu'$ et le plan de V_1 et V_2 font un angle infiniment petit ;

4. par les mêmes lemmes le point ν' est à un écart du second ordre du point où vient l'extrémité du vecteur $V_2\,dt$ subissant la translation dont l'axe est $V_1\ dt$ et dont l'étendue centrale est $V_1\ dt$ donc enfin le vecteur $\frac{\overrightarrow{M\nu'}}{dt}$ issu de M a pour valeur limite le vecteur V_3 issu de M. C. Q. F. D.

Remarque. — Le cas où les vecteurs V_1 et V_2 seraient dans un même plan exigerait une légère modification de la démonstration.

Corollaire. — Le vecteur lim. $\frac{M\nu'}{dt} = V_3$ est indépendant de l'ordre dans lequel sont envisagés les vecteurs ω_1 et ω_2 portés par U_1 et par U_2 donc :

Théorème 15. — Dans le mouvement qui résulte de deux rotations relatives autour de deux axes donnés à l'époque t tout point du second solide défini par sa position à l'époque t a une vitesse indépendante de l'ordre des emboitements des solides entraînés.

Théorème 16. — Le théorème précédent se généralise de lui-même pour le cas de n rotations relatives quelconques.

Théorème 17. — La vitesse linéaire d'un point du solide S_n défini par sa position à l'époque t est le vecteur résultant des vecteurs qui représentent pour les mêmes points les vitesses linéaires dues aux rotations *isolées* ω_1, ω_2,... portées par les axes U_1 U_2,... etc.

Définition des systèmes de vecteurs équivalents. — Le système des vecteurs vitesses de rotation, $\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_n$, portés par les droites U_1, U_2 ..., U_n définit donc, dans une composition de mouvements relatifs, *une distribution des vitesses* qui à l'époque t est indépendante de l'ordre dans lequel sont envisagés ces vecteurs, tout vecteur ω_i peut d'ailleurs, sans changer *la distribution des vitesses* dans l'espace envisagé à l'époque t, être décomposé en vecteurs concourants, en l'un quelconque des points de la droite qui porte ce vecteur.

Enfin, par la nature même des vecteurs vitesses de rotation, une paire de deux vecteurs égaux et contraires, portés par une même droite, mais non immédiatement appliqués au même point, forment, au point de vue de la distribution des vitesses un ensemble équivalent à zéro, c'est-à-dire un ensemble *en équilibre;* une telle paire se nomme *paire de vecteurs mutuels*. Nous pouvons donc enfin énoncer le théorème intéressant que voici :

Théorème 18. — Il existe des systèmes de vecteurs *équivalents* et cette équivalence jouit des propriétés suivantes :

1. Tout système de vecteurs reste équivalent à lui-même quand on lui ajoute ou lui retranche un nombre quelconque de paires de systèmes de deux vecteurs mutuels;

2. un système de vecteurs concourants équivaut toujours à un vecteur résultant déterminé comme nous l'avons vu;

3. Un système de deux vecteurs ne peut équivaloir à zéro, (c'est-à-dire produire une distribution de vitesses nulles) que si ces vecteurs forment une paire de vecteurs mutuels.

Ces propriétés vont nous permettre d'achever la trigonométrie plane.

V. — Réduction de Poinsot et Trigonométrie plane.

Soient V un vecteur, et O un point particulier de l'espace d'ailleurs quelconque, soit H le pied d'une perpendiculaire abaissée de O sur V, et soit H' le point symétrique de H par rapport au point O. Considérons le vecteur V comme appliqué en H; remplaçons d'abord le vecteur V_H par les vecteurs $\left(\frac{1}{2}V\right)_H$, $\left(\frac{1}{2}V\right)_H$, puis appliquons au point H' deux vecteurs $W_{H'}$ et $-W_{H'}$, perpendiculaires à OH dans le plan (O, V_H) et égaux respectivement à $\frac{1}{2}V_H$ et à $-\frac{1}{2}V_H$; c'est permis puisque $W_{H'}$ et $-W_{H'}$ s'équilibrent. Soit x la distance OH.