

# SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES de sin x et cos x.

Autor(en): **Barbarin, P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-8429>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

qu'en réalité il s'agit non pas d'introduire l'ensemble de ces éléments dans les programmes de l'enseignement secondaire supérieur, mais de fournir une première initiation à l'aide de quelques problèmes fondamentaux très simples. Il se déclare entièrement d'accord avec la proposition de M. Suter visant l'introduction de notions historiques dans l'enseignement des classes supérieures et il propose qu'une phrase dans ce sens soit ajoutée au second vœu. L'assemblée décide d'en faire un troisième vœu :

*III. Il est désirable que dans l'enseignement secondaire supérieur, notamment dans les Gymnases, une plus grande place soit accordée au développement historique des Mathématiques.*

Ces trois propositions ont été adoptées à l'unanimité.

## SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES de $\sin x$ et $\cos x$ .

D'après le nouveau programme officiel d'admission à l'Ecole Centrale des arts et manufactures, les développements en séries des fonctions  $\sin x$  et  $\cos x$ , nécessaires pour établir la formule d'Euler et ses conséquences, doivent pouvoir se déduire, par le procédé élémentaire, de l'inégalité

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}.$$

Le raisonnement est bien simple : le voici en quelques mots :

I. Considérons en premier lieu les séries alternées

$$U = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dots$$

$$V = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + \dots$$

Leurs séries modulaires  $U_1$  et  $V_1$  sont convergentes pour toute valeur de  $x$ , puisque le rapport  $\frac{u_{p+1}}{u_p}$  de la règle de D'Alembert y a toujours zéro pour limite quelle que soit la manière dont  $p$  croît indéfiniment; les séries alternées sont donc aussi convergentes. Nous allons prouver que l'on a

$$U = \cos x \quad , \quad V = \sin x.$$

II. Soient

$$\begin{array}{ll} S_0 = 1 , & \Sigma_0 = x , \\ S_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} , & \Sigma_1 = x - \frac{x^3}{3!} , \\ S_2 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} , & \Sigma_2 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} , \\ S_3 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} , & \Sigma_3 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} , \\ \dots & \dots \end{array}$$

Les fonctions

$$\begin{array}{ll} y_0 = S_0 - \cos x , & z_0 = \Sigma_0 - \sin x , \\ y_1 = S_1 - \cos x , & z_1 = \Sigma_1 - \sin x , \\ y_2 = S_2 - \cos x , & z_2 = \Sigma_2 - \sin x , \\ y_3 = S_3 - \cos x , & z_3 = \Sigma_3 - \sin x , \\ \dots & \dots \end{array}$$

jouissent des propriétés suivantes :

1°  $y_p$  est la dérivée de  $z_p$  par rapport à  $x$ , et à son tour  $z_p$  est la dérivée de  $-y_{p+1}$ .

2° Pour toute valeur positive de  $x$ ,  $y_0$  est positive, donc  $z_0$  est fonction croissante et toujours positive puisqu'elle est nulle pour  $x = 0$ .

$y_1$  est donc toujours décroissante et négative, à cause de la même remarque, et il en est de même de  $z_1$ . Par suite  $y_2$  et  $z_2$  sont toujours croissantes et positives,  $y_3$  et  $z_3$  toujours décroissantes et négatives.

En général, pour toute valeur positive de  $x$ , les fonctions :

$y_{2n}$  et  $z_{2n}$ , nulles pour  $x = 0$ , sont croissantes et positives,

$y_{2n+1}$  et  $z_{2n+1}$ , nulles pour  $x = 0$ , sont décroissantes et négatives.

Donc on a

$$S_{2n} > \cos x > S_{2n+1},$$

$$\Sigma_{2n} > \sin x > \Sigma_{2n+1},$$

et aussi

$$S_{2n+2} > \cos x > S_{2n+1},$$

$$\Sigma_{2n+2} > \sin x > \Sigma_{2n+1}.$$

Par suite, pour  $n = \infty$ ,  $x$  étant positif, on a bien

$$\cos x = U, \quad \text{et} \quad \sin x = V.$$

3° Soit maintenant  $x$  négatif. Puisque

$$\cos(-x) = \cos x,$$

et que la série  $U$  ne dépend que des puissances paires de  $x$ , le premier résultat s'applique à  $x$  quelconque.

Ensuite,

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

et la série  $V$  ne dépendant que des puissances impaires de  $x$ , sa somme change de signe également avec  $x$ , donc on a en définitive quel que soit  $x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

P. BARBARIN (Bordeaux).

---