SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES de sin x et cos x.

Autor(en): **Barbarin, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-8429

qu'en réalité il s'agit non pas d'introduire l'ensemble de ces éléments dans les programmes de l'enseignement secondaire supérieur, mais de fournir une première initiation à l'aide de quelques problèmes fondamentaux très simples. Il se déclare entièrement d'accord avec la proposition de M. Suter visant l'introduction de notions historiques dans l'enseignement des classes supérieures et il propose qu'une phrase dans ce sens soit ajoutée au second vœu. L'assemblée décide d'en faire un troisième vœu :

III. *Il est désirable que dans l'enseignement secondaire supérieur, notamment dans les Gymnases, une plus grande place soit accordée au développement historique des Mathématiques.*

Ces trois propositions ont été adoptées à l'unanimité.

SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES de $\sin x$ et $\cos x$.

D'après le nouveau programme officiel d'admission à l'Ecole Centrale des arts et manufactures, les développements en séries des fonctions $\sin x$ et $\cos x$, nécessaires pour établir la formule d'Euler et ses conséquences, doivent pouvoir se déduire, par le procédé élémentaire, de l'inégalité

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}.$$

Le raisonnement est bien simple : le voici en quelques mots :

I. Considérons en premier lieu les séries alternées

$$U = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dots,$$

$$V = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + \dots.$$

Leurs séries modulaires U_1 et V_1 sont convergentes pour toute valeur de x, puisque le rapport $\frac{u_{p+1}}{u_p}$ de la règle de D'Alembert y a toujours zéro pour limite quelle que soit la manière dont p croît indéfiniment; les séries alternées sont donc aussi convergentes. Nous allons prouver que l'on a

$$U = \cos x \quad , \quad V = \sin x.$$

II. Soient

$$S_0 = 1 , \qquad \Sigma_0 = x ,$$

$$S_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} , \qquad \Sigma_1 = x - \frac{x^3}{3!} ,$$

$$S_2 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} , \qquad \Sigma_2 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ,$$

$$S_3 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} , \qquad \Sigma_3 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} ,$$

. . . .

Les fonctions

$$y_0 = S_0 - \cos x , \qquad z_0 = \Sigma_0 - \sin x ,$$

$$y_1 = S_1 - \cos x , \qquad z_1 = \Sigma_1 - \sin x ,$$

$$y_2 = S_2 - \cos x , \qquad z_3 = \Sigma_2 - \sin x ,$$

$$y_3 = S_3 - \cos x , \qquad z_4 = \Sigma_3 - \sin x ,$$

. . . .

jouissent des propriétés suivantes :

1° y_p est la dérivée de z_p par rapport à x, et à son tour z_p, est la dérivée de $- y_{p+1}$.

2° Pour toute valeur positive de x, y_0 est positive, donc z_0 est fonction croissante et toujours positive puisqu'elle est nulle pour $x = 0$.

y_1 est donc toujours décroissante et négative, à cause de la même remarque, et il en est de même de z_1. Par suite y_2 et z_2 sont toujours croissantes et positives, y_3 et z_3 toujours décroissantes et négatives.

En général, pour toute valeur positive de x, les fonctions :

y_{2n} et z_{2n}, nulles pour $x = 0$, sont croissantes et positives,

y_{2n+1} et z_{2n+1}, nulles pour $x = 0$, sont décroissantes et négatives.

Donc on a

$$S_{2n} > \cos x > S_{2n+1},$$
$$\Sigma_{2n} > \sin x > \Sigma_{2n+1},$$

et aussi

$$S_{2n+2} > \cos x > S_{2n+1},$$
$$\Sigma_{2n+2} > \sin x > S_{2n+1}.$$

Par suite, pour $n = \infty$, x étant positif, on a bien

$$\cos x = U, \quad \text{et} \quad \sin x = V.$$

3° Soit maintenant x négatif. Puisque

$$\cos(-x) = \cos x,$$

et que la série U ne dépend que des puissances paires de x, le premier résultat s'applique à x quelconque.

Ensuite,

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

et la série V ne dépendant que des puissances impaires de x, sa somme change de signe également avec x, donc on a en définitive quel que soit x

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots.$$

P. Barbarin (Bordeaux).