Démonstration élémentaire du Théorème de Feuerbach.

Autor(en): **Sawayama, V.**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sous ce titre nous publions les remarques et renseignements concernant plus ou moins directement l'enseignement mathématique, telles que des descriptions d'instruments ou d'appareils nouveaux, etc. Quant à la correspondance, elle permet à tout lecteur de présenter sous une forme rapide les idées qui lui semblent utiles, les remarques suggérées par la lecture d'un article, ou les questions sur lesquelles il aurait besoin d'un renseignement.

La Rédaction.

Démonstration élémentaire du Théorème de Feuerbach.

Le cercle des neufs points d'un triangle est tangent intérieurement au cercle inscrit et extérieurement au cercle ex-inscrit.

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème célèbre. Celle que je présente ci-après est établie uniquement sur les trois premiers livres d'Euclide, et, à ce point de vue, offre peut-être quelque intérêt.

Il est évident que, dans le cas où le triangle est isoscèle, le cercle des neuf points est tangent au milieu de la base, intérieurement au cercle inscrit et extérieurement au cercle ex-inscrit de l'angle correspondant, et qu'il coïncide avec le cercle inscrit dans le cas où le triangle est équilatéral. Nous allons donc démontrer le théorème dans le cas général où le triangle a deux côtés différents.

Dans le triangle ABC nous supposons que le côté AC est plus grand que le côté AB et soient :

A′ le milieu du côté BC ;
B′ » » CA ;
D le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet A sur le côté BC ;
I le centre du cercle inscrit au triangle ABC ;
Q le milieu de l'arc A′B′D du cercle des neuf points ;
W le point de rencontre de AI avec BC.

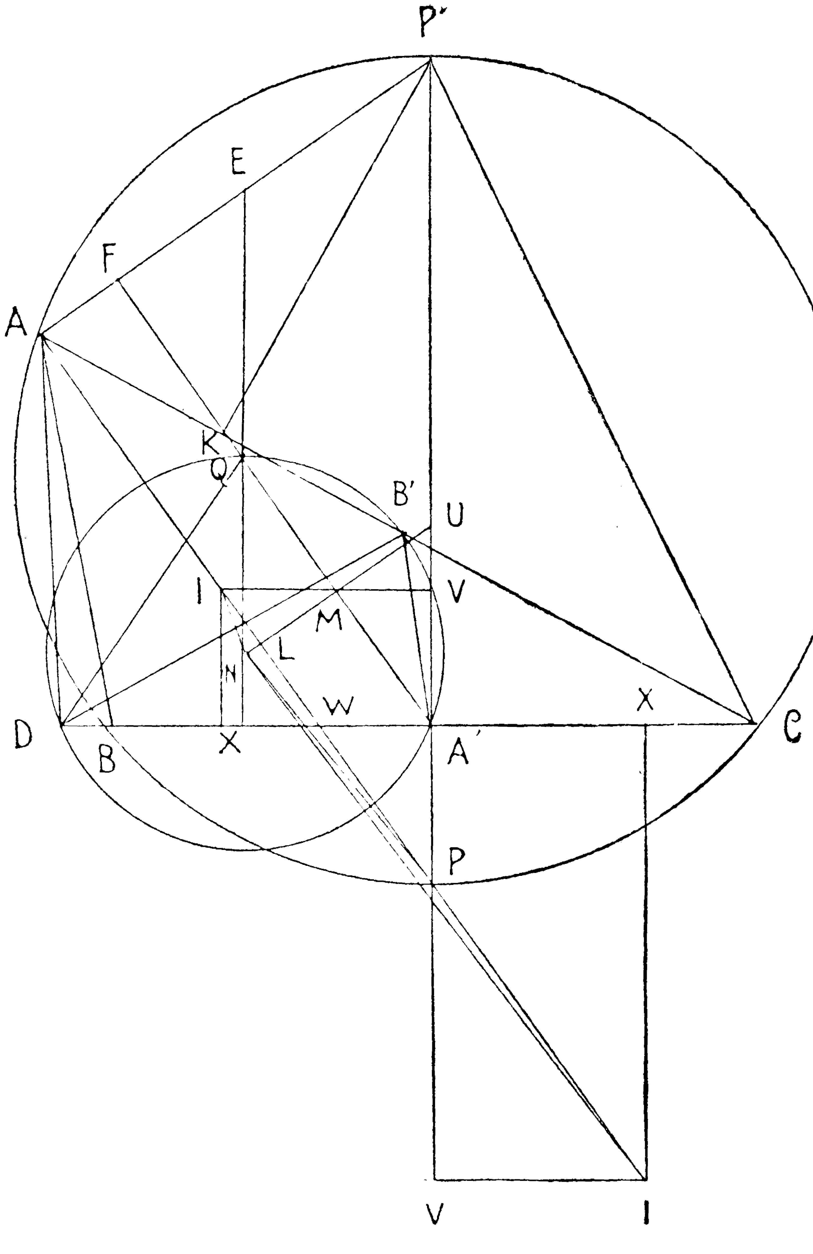
Alors, puisque A′B′ est parallèle à BA, on a

$$\sphericalangle B'A'D = \sphericalangle C + \sphericalangle CAB \qquad \sphericalangle B'DA' = \sphericalangle C$$

et

$$\sphericalangle QA'D = \frac{1}{2}\,(\sphericalangle B'A'D + \sphericalangle B'DA') = \frac{1}{2}\,(\sphericalangle C + \sphericalangle CAB + \sphericalangle C)$$

$$= \sphericalangle C\,\frac{1}{2} + \sphericalangle CAB \quad .\cdot. \quad \sphericalangle QA'D = \sphericalangle AWB\ .$$



Donc A′Q est parallèle à IA.

Soient ensuite

P le milieu d'arc BC du cercle circonscrit;
N le centre du cercle des neuf points;
PP′ le diamètre du cercle circonscrit;
E le point de rencontre de QN avec AP′;
F » » A′Q » AP′;
K » » A′Q » AC;

L le point de rencontre avec AP de la perpendiculaire passant par N ;
M » » de cette perpendiculaire avec A′Q ;
U » » » » PP′ ;
V le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur PP′ ;
X » » » BC.

En conséquence, on a

$$A'M = MQ \quad \therefore \quad NM \perp A'Q$$

$$\therefore \quad \triangle MA'U = \triangle MQN \;, \quad MN = MU \;, \quad A'U = NQ \;.$$

Maintenant, dans le triangle PNU, on a

$$\overline{PU}^2 - \overline{PN}^2 = 2NU \,.\, LM \;.$$

Mais

$$2NU \,.\, LM = 2EP' \,.\, AF = AP' \,.\, AF$$

$$\sphericalangle A'KC = \sphericalangle PAC = \sphericalangle A'P'C$$

Le quadrilatère A′KP′C peut donc être inscrit dans un cercle. Et on a

$$\sphericalangle\, P'KC = \sphericalangle P'A'C = 1 \text{ droit} \;.$$

D'ailleurs, dans le triangle rectangle AP′K,

$$AP' \,.\, AF = \overline{AK}^2 \;;$$

mais

$$AK = \frac{1}{2}(AC - AB) = A'X$$

$$\overline{A'X}^2 = \overline{VI}^2 = \overline{PI}^2 - \overline{PV}^2$$

$$\therefore \quad \overline{PU}^2 - \overline{PN}^2 = \overline{PI}^2 - \overline{PV}^2$$

ou

$$\overline{PN}^2 + \overline{PI}^2 = \overline{PU}^2 + \overline{PV}^2 \;. \quad (\alpha)$$

Le point A′ est le milieu entre le point X et le point de tangence avec BC du cercle ex-inscrit du triangle ABC ; la droite joignant le centre du cercle inscrit à celui du cercle ex-inscrit est divisée en deux parties égales au point P, et la projection orthogonale de la droite est aussi divisée en deux parties égales en même point.

Employant les mêmes lettres pour le cercle ex-inscrit comme pour le cercle inscrit, nous avons le résultat suivant :

$$\overline{IN}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{PI}^2 \mp 2PI \,.\, PL \;;$$

moins ou plus, suivant qu'il s'agit du cercle inscrit ou du cercle ex-inscrit.

Joignant ce résultat à la relation (α) et observant que I, L, V, U sont sur le même cercle (PI.PL = PU.PV), nous obtenons

$$\overline{IN}^2 = \overline{PU}^2 + \overline{PV}^2 \mp 2PU \,.\, PV = (PU \mp PV)^2$$

$$= \overline{VU}^2 = (A'U \mp A'V)^2 = (NQ \mp IX)^2$$

$$\therefore \quad IN = NQ \mp IX \,.$$

Ainsi la distance entre le centre du cercle des neuf points et le mi-centre est égale à la différence de leurs rayons ; donc les deux cercles sont tangents intérieurement.

La distance entre le centre du cercle des neuf points et le ex-centre est égale à la somme de leurs rayons; donc les deux cercles sont tangents extérieurement.

V. Sawayama (Tokio).

Sur les racines des équations algébriques.

Les remarques présentées par M. Kariya (v. n° du 15 septbr. 1905; p. 398-399) au sujet de ma note parue en juillet 1904 (p. 297 et suivantes) reposent sur un malentendu. Il s'agit du théorème suivant :

Si dans un polynome entier avec tous ses termes positifs ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, le rapport d'un coefficient au précédent ne va pas en croissant, l'équation que l'on obtient en égalant le polynome à zéro a nécessairement des racines imaginaires.

L'erreur de M. Kariya résulte de ce qu'il ne tient pas compte de la distinction que nous faisons entre l'ordre des coefficients et l'ordre des rapports de ces coefficients. En disant que *le rapport d'un coefficient au précédent ne va pas en croissant*, nous entendons 1° que dans le polynome

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m,$$

on prend comme ordre des coefficients l'ordre des indices et l'on forme les rapports

$$\frac{a_1}{a_0} = \lambda_1 \,, \quad \frac{a_2}{a_1} = \lambda_2 \dots . \quad \frac{a_m}{a_{m-1}} = \lambda_m \,;$$