propos d'un théorème sur le triangle.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

tome VI, p. 176; tome VII, p. 344 et tome VIII, p. 55); cette année enfin, l'Université de Louvain a littéralement calqué l'enseignement donné à l'École militaire, dans ses « Notes du Cours de Géométrie descriptive de l'Université catholique de Louvain », notes publiées sans nom d'auteur (Louvain, 1904).

On peut donc affirmer qu'en Belgique, l'évolution prévue en 1893 (*Mathesis*, 1893, p. 45) a été complète et rapide; nous pouvons ajouter qu'il en est résulté un progrès considérable, comme le prouvent annuellement, jusqu'à l'évidence, les examens d'entrée à l'Ecole militaire.

Signalons encore qu'en Portugal, le Cours de Géométrie descriptive de l'École polytechnique, publié en 1899 par L. P. da Motta Pegado se borne à n'employer que la direction de la ligne de terre.

(*Les Mathématiques en Portugal au XIXe siècle*, par R. Guimaraes, p. 77. Coïmbre, 1900).

F. Chomé (Bruxelles).

Une nouvelle règle à calculs.

La *règle à calculs circulaire* Ch. Charpentier, qui a été signalée aux lecteurs de cette Revue par M. H. Laurent (Paris), vient d'être mise en vente, au prix de fr. 18.—, chez les principaux opticiens. On peut aussi l'obtenir directement en s'adressant à l'inventeur M. Ch. Charpentier, Ingénieur, à Valdoie-Belfort (France).

A propos d'un théorème sur le triangle.

Le théorème de M. Kariya publié dans notre numéro de mars 1904 (p. 130 à 132) et les intéressantes remarques qu'il a provoquées (p. 236-239, 406-411) nous en procurent encore de nouvelles que nous résumons ci-après.

VIII. — Lettre de M. Barbarin (Bordeaux) :

Dans la note sur le théorème de M. Kariya, p. 238, le lecteur est prié de faire la rectification suivante :

ligne 16 : lire α'_1 et α'_2 au lieu de α_1 et α_2

ligne 17 : lire α_1 et α_2 au lieu de α'_1 α'_2

ligne 24 : lire $\dfrac{p-c}{p-b}$ au lieu de $\dfrac{p-b}{p-c}$

IX. — Lettre de M. Cantoni (Viadano, Mantova, Italie).

a) La proposition suivante admet comme cas particulier celui qui a été indiqué par M. Kariya.

Si d'un point quelconque O du plan d'un triangle ABC, pourvu qu'il ne soit pas situé sur les côtés et ne coïncide pas avec l'orthocentre, nous abaissons sur les côtés les perpendiculaires OX, OY, OZ et nous prenons sur elles les points D, E, F tels que

$$OD : OE : OF = {}^1/OX : {}^1/OY : {}^1/OZ$$

les trois droites AD, BE, CF concourent en un point de l'hyperbole équilatère passant par le point O et par les trois sommets du triangle.

Il suffit observer que si, par exemple, A' et C' sont les points où se coupent ZO et BC, XO et BA, les quatre points X, Z, A', C' sont concycliques.

A l'aide de cette considération on peut aisément décrire par points l'hyperbole équilatère qui passe par quatre points donnés.

b) Le théorème de M. Franke que j'ai généralisé (*Enseig. Math.* p. 410, 1904) peut se démontrer plus rapidement en appliquant la propriété que deux figures homothétiques à une troisième sont homothétiques entre elles et les trois centres d'homothétie sont collinéaires. En effet, en se reportant à la figure et aux notations alors usées, on voit bientôt que le triangle $M_1M_2M_3$ est homothétique à $D_1D_2D_3$, qui à son tour est homothétique à $A_1A_2A_3$.

Peut-être est-il digne de mentionner le cas particulier où M coïncide avec le centre du cercle des neuf points : il fournit le corollaire :

Si sur les rayons du cercle des neuf points menés aux milieux des côtés, on prend trois points également distants du centre, les droites joignant ces points aux sommets respectivement opposés aux côtés auxquels sont menés les rayons concourent en un point de la droite de Euler.

c) La propriété des figures homothétiques que je viens de mentionner m'a fait parvenir à un théorème sur le triangle que, à ma connaissance, personne n'a encore énoncé. Soient X, Y, Z les pieds des hauteurs d'un triangle ABC et X', Y', Z' les milieux des côtés du triangle orthique XYZ. Soient encore K_1, K_2, K_3 les sommets du triangle formé par les tangentes au cercle circonscrit à A B C menées par A, B, C. On sait que le point de Gergonne du triangle $K_1K_2K_3$ est point de Lemoine du triangle fondamental ABC et que les trois triangles $K_1K_2K_3$, XYZ, $X'Y'Z'$ ont les côtés respectivement parallèles de sorte qu'ils sont homothétiques.

Les droites AK_1, BK_2, CK_3 sont les symédianes du triangle ABC et passent par les milieux des côtés du triangle orthique qui sont respectivement antiparallèles aux côtés de ABC. Il s'en suit que le centre d'homothétie des deux triangles $X'Y'Z'$ et $K_1K_2K_3$ est le point de Lemoine K du triangle A B C. Le centre d'homothétie de XYZ et $X'Y'Z'$ est leur barycentre G et le centre d'homothétie de XYZ et $K_1K_2K_3$ sera un point P situé sur la droite GK. Et puisque le barycentre de XYZ et le point de Gergonne de $K_1K_2K_3$ sont sur GK, le barycentre de $K_1K_2K_3$ et le point de Gergonne de XYZ se trouveront aussi sur la même droite. Nous aurons donc le théorème :

Le point de Lemoine d'un triangle est situé sur la droite joignant le barycentre de son triangle orthique au barycentre du triangle formé des tangentes au cercle circonscrit menées par les sommets. Sur cette droite sont situés aussi le point de Gergonne du triangle orthique et le point de concours des droites joignant les sommets du triangle formé par les tangentes aux pieds homologues des hauteurs du triangle fondamental.

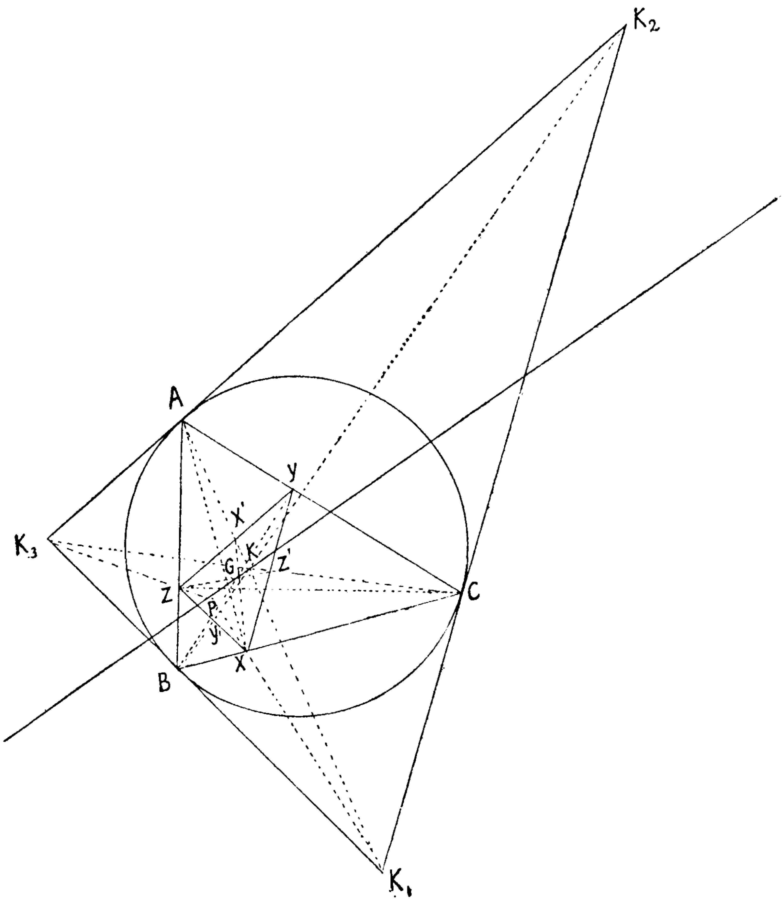

Fig. 1.

d) Soit encore ABC le triangle fondamental ; décrivons le cercle inscrit au triangle et touchant les côtés en A′, B′, C′ et décrivons d'un rayon arbitraire un autre cercle concentrique au premier qui coupe les côtés du triangle en D, D′, E, E′, F, F′. Il en résultera manifestement :

$$DA' = A'D' \quad EB' = B'E' \quad FC' = C'F'$$
$$AC' = AB' \quad BC' = BA' \quad CA' = CB'$$

et les couples de droites FE′ et F′E, DF′ et D′F, DE′ et D′E seront respectivement parallèles à C′B′, C′A′, A′B′. On peut considérer les six points D, D′, E, E′, F, F′ comme intersections des côtés du triangle fondamental avec les côtés du triangle PQR, ou bien de P′Q′R′ en désignant par P, Q, R, P′, Q′, R′ les points de rencontre des trois couples de droites que je viens de considérer.

Remarquons que les triangles FE'P, C'B'A', F'EP' sont deux à deux homothétiques, A étant le centre d'homothétie, et que par suite les points A, P, A', P' sont en ligne droite. De même on a la collinéation des points B, Q, B', Q' et C, R, C', R' et par conséquent les triangles PQR et P'Q'R' sont homothétiques à A'B'C', le centre d'homothétie étant au point de Gergonne G du triangle fondamental. Il est manifeste alors que les côtés de tout triangle homothétique à A'B'C', G étant le centre d'homothétie, détermineront sur les côtés du triangle fondamental six points situés sur un cercle concentrique au cercle inscrit. En particulier les trois parallèles aux côtés de A'B'C' menées par G détermineront le cercle de Adams.

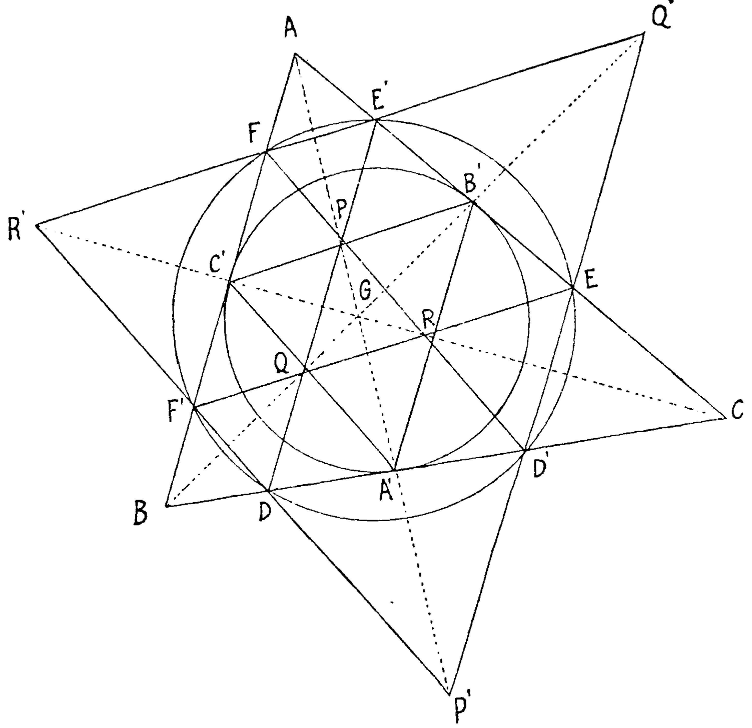

Fig. 2.

E. Cantoni.

X. — Lettre de M. Daniels (Fribourg, Suisse) :

1. M. G. Franke (*Ens. Math.* VI, p. 407-409) démontre le théorème suivant :

Si $D_1D_2D_3$ sont les milieux des côtés d'un triangle, M le centre du cercle circonscrit, les droites A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 passent par un point de la droite d'Euler, pourvu que $M_1M_2M_3$ satisfassent aux conditions.

$$(D_1MM_1) = (D_2MM_2) = (D_3MM_3) .$$

Ce théorème n'est cependant qu'un cas spécial de celui-ci :

Si $D_1D_2D_3$ sont les milieux des côtés, P un point quelconque, les droites A_1P_1 ,A_2P_2, A_3P_3 passent par un point P' situé sur la droite qui relie le point P au centre de gravité G, pourvu que $P_1P_2P_3$ satisfassent aux conditions :

$$(D_1PP_1) = (D_2PP_2) = (D_3PP_3) \equiv \lambda .$$

La position du point P′ est déterminée par l'équation :

$$(GPP') = \frac{2}{3}\lambda .$$

2. En effet, nous avons d'abord pour les milieux des côtés.

$$D_1 \equiv \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \qquad D_2 \equiv \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \qquad D_3 \equiv \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 ,$$

et si le point P est

$$P \equiv x_1\mathbf{r}_1 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3 ,$$

les points P_1, P_2, P_3 seront

$$P_1 \equiv \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2} - \frac{\lambda(x_1\mathbf{r}_1 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3)}{x_1 + x_2 + x_3} ,$$

ou encore

$$P_1 \equiv -2\lambda x_1\mathbf{r}_1 + (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_2)\mathbf{r}_2 + (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_3)\mathbf{r}_3$$

etc. ; les droites A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 passent donc par le point

$$P' \equiv (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_1)\mathbf{r}_1 + (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_2)\mathbf{r}_2 + (x_1 + x_2 + x_3 - 2\lambda x_3)\mathbf{r}_3$$

qui, si nous introduisons les vecteurs $\mathbf{r}_g$ et $\mathbf{r}_p$ du centre de gravité et du point P peut s'écrire :

$$P' \equiv 3\mathbf{r}_g - 2\lambda\mathbf{r}_p .$$

Il s'ensuit

$$(GPP') = \frac{2\lambda}{3} .$$

3. Si l'on prend p. ex. pour P le centre du cercle inscrit

$$P \equiv a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3$$

et $\lambda = 1$, les transversales angulaires A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 sont parallèles aux droites PD_1, PD_2, PD_3 et le point P′ devient

$$P' \equiv (a_2 + a_3 - a_1)\mathbf{r}_1 + (a_3 + a_1 - a_2)\mathbf{r}_2 + (a_1 + a_2 - a_3)\mathbf{r}_3$$

c. à. d. le point de Nagel. Il s'ensuit 1° que les transversales angulaires du point de Nagel N sont parallèles aux droites qui relient le centre du cercle inscrit I aux milieux des côtés. 2° que G, I et N sont sur une droite et 3° que $(GIN) = \frac{2}{3}$. Si $N_1N_2N_3$ sont les autres points du groupe de Nagel et $I_1I_2I_3$ les centres des cercles exinscrits, on a de même

$$(GI_1N_1) = (GI_2N_2) = (GI_3N_3) = \frac{2}{3} .$$

4. La relation $(\mathrm{GPP'}) = \frac{2\lambda}{3}$ ou $\frac{\mathrm{GP'}}{\mathrm{GP}} = \frac{2\lambda}{2\lambda - 3}$ nous prouve, que les figures décrites par les points correspondants P et P′ sont semblable, si λ est constant. Leur centre de similitude est alors G.

M. Fr. Daniels.

XI. — Lettre de M. C. Stolp (Kampen, Hollande) :

a) A propos de la lettre de M. Barbarin.

1. Le cercle circonscrit au triangle ABC et la conique I, lieu du point de Kariya, ont pour quatrième point d'intersection

$$x(r - \mathrm{R} \cos \mathrm{A}) = y(r - \mathrm{R} \cos \mathrm{B}) = z(r - \mathrm{R} \cos \mathrm{C}) ,$$

ce qui est aisé à vérifier.

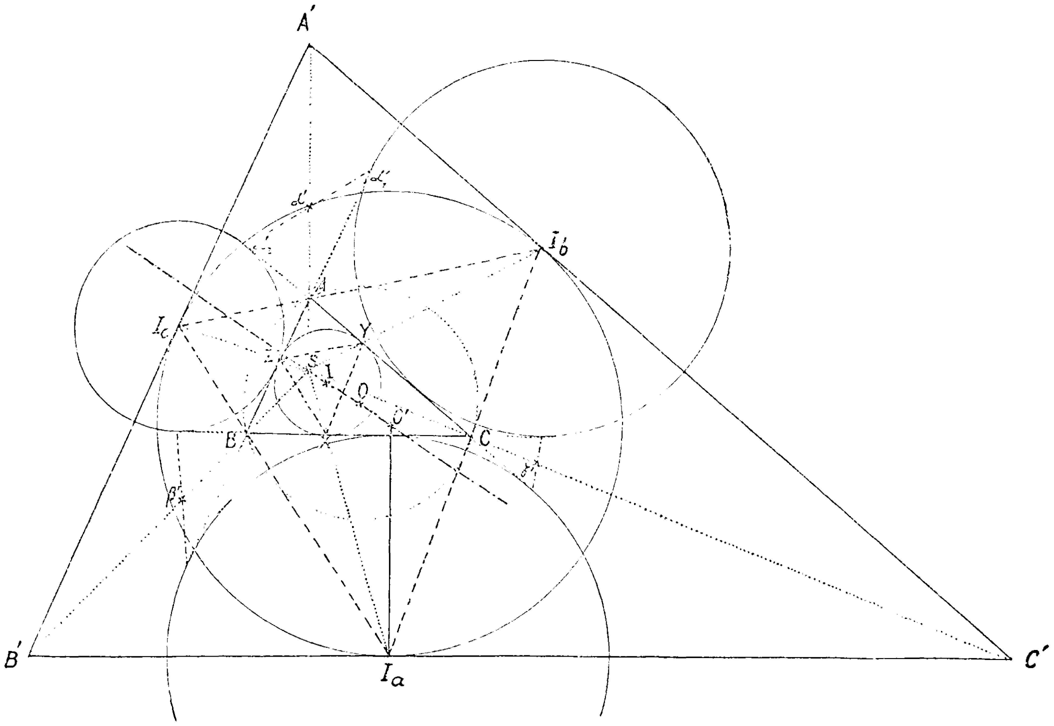

Fig. 3.

2. Comme nous verrons, on connaît depuis longtemps le point φ' de M. Barbarin. Nommons I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles tritangents ; r, r_a, r_b, r_c leurs rayons ; XYZ les contacts du cercle inscrit avec BC, CA, AB ; O et O′ les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC et $\mathrm{I}_a\mathrm{I}_b\mathrm{I}_c$; S le centre d'homothétie des triangles $\mathrm{I}_a\mathrm{I}_b\mathrm{I}_c$ et XYZ, g et g' leurs barycentres ; on sait que les points S, O′, g, g' se trouvent sur la droite IO (Voir : Casey, *A sequel to Euclid*, Suppl. Chapt. Sect. VIII, Tritangent circles). Considérons en particulier le point S.[1] Pour en trouver les coor-

[1] Le point *S*, notation de Casey, correspond au point φ', notation de M. Barbarin.

données trilinéaires, menons par I_a, I_b, I_c les droites B'C', C'A', A'B' parallèles à BC, CA, AB. Les trois droites (en même temps tangentes au cercle $I_aI_bI_c$) déterminent un triangle A'B'C' homothétique avec ABC par rapport au centre S. Les coordonnées y', z' du sommet A' étant $-r_b$, $-r_c$, la droite AA' a pour équation

$$\frac{y}{r_b}=\frac{z}{r_c} \text{ ou } \frac{y}{\operatorname{tang}\frac{B}{2}}=\frac{z}{\operatorname{tang}\frac{C}{2}}.$$

On en conclut que les droites AA', BB', CC' concourent au point

$$\frac{x}{\operatorname{tang}\frac{A}{2}}=\frac{y}{\operatorname{tang}\frac{B}{2}}=\frac{z}{\operatorname{tang}\frac{C}{2}},$$

inverse du point φ (page 238), et l'on observe que les points φ' et S sont identiques.

b) A propos de la lettre de M. HAROLD HILTON (page 237).

M. Hilton remarque que les triangles ABC, DEF sont réciproques par rapport à une circonférence de cercle. Il s'ensuit qu'on peut regarder comme donné *l'un ou l'autre* des deux triangles.

Si l'on choisit DEF pour triangle de référence, k étant le rayon de son cercle circonscrit, et qu'on désigne par ξ, η, ζ les distances d'un point quelconque aux côtés EF, FD, DE, on trouvera que la droite AD a pour équation

$$\eta(k\cos F\cos D+r\cos E)=\zeta(k\cos D\cos E+r\cos F)$$

et que AD, BE, CF, passent par le point P

$$\xi(k\cos E\cos F+r\cos D)=\eta(k\cos F\cos D+r\cos E)=\zeta(k\cos D\cos E+r\cos F).$$

En faisant $r=0$, $r=\infty$, $r=k$ le point P coïncide avec les points suivants du triangle DEF : le centre O du cercle circonscrit, l'orthocentre H, le point de Lemoine K. Supposons les points D,E,F fixes ; si l'on fait varier r le point P décrit une conique qui, passant par les sommets du triangle DEF et par son orthocentre, est une hyperbole équilatère. Son inverse est la droite d'Euler qu'elle coupe aux points H, O.

C. STOLP.

XII. — La Géométrie du triangle est une mine inépuisable de constructions et de propriétés des plus intéressantes. Les lettres qui nous sont adressées à propos de l'article de M. Kariya le prouvent suffisamment. Nous devons nous borner à mentionner encore les lettres de MM. Ant. Pleskot (Pilsen) et Aug. Tafelmacher (Santiago du Chili).

M. Pleskot fait intervenir le triangle $A_1B_1C_1$, polaire réciproque du triangle ABC par rapport à une conique arbitraire. Il prend ensuite pour conique un cercle de centre O; puis envisageant pour O quelques positions particulières, il obtient quelques propriétés très simples et les propriétés corrélatives en vertu du principe de Dualité. L'une de ces propriétés est précisément celle qu'exprime le théorème énoncé par M. Kariya.

M. Tafelmacher nous signale une Note *sur les coordonnées homogènes obliques*, destinée à la *Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht*, dans laquelle il donne une démonstration du théorème de Kariya. On y trouvera, entre autres, l'expression de la puissance de point K par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC.

La Rédaction.

CHRONIQUE

Paul Tannery.

Les sciences mathématiques et historiques viennent de faire une grande perte en la personne de M. *Paul Tannery*, directeur de la manufacture des tabacs de Pantin, décédé le 27 novembre dernier à l'âge de 61 ans. Sa mort subite a été une douloureuse surprise pour tous ceux qui l'ont connu et tout particulièrement pour ceux qui ont encore eu l'occasion de l'approcher au Congrès des mathématiciens à Heidelberg et au Congrès de philosophie et d'histoire des sciences à Genève.

Ancien élève de l'Ecole polytechnique de Paris, Tannery sortit dans le corps des ingénieurs des tabacs, où il suivit régulièrement la carrière, ce qui ne l'empêcha pas de rester en contact avec la science pure. Il consacra ses loisirs principalement à l'histoire des sciences et à la philosophie. D'une remarquable érudition pour tout ce qui touche à l'histoire des sciences, il était connu aussi bien des mathématiciens et des physiciens, que des hellénistes et des philologues. Il fut l'un des principaux organisateurs des congrès d'histoire des sciences. Ses travaux ont été publiés notamment dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, l'*Archiv für Geschichte der Philosophie*, la *Revue de philosophie*, la *Revue des Etudes grecques*, la *Revue de Philologie*, et dans *Bibliotheca*