

LES DÉFINITIONS MATHÉMATIQUES

Autor(en): **Couturat, Louis**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-8423>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

même de nos bacheliers qui est vraiment d'une anharmonie exagérée.

A cette œuvre de progrès contribuera ainsi, sans le vouloir, cet enseignement des mathématiques de l'ingénieur, s'il sait garder son originalité propre, jusqu'au jour où il réagira sur la pédagogie mathématique imposée à nos enfants.

Jules ANDRADE (Besançon).

LES DÉFINITIONS MATHÉMATIQUES¹

Une définition mathématique est une égalité logique dont le premier membre est le terme à définir, et dont le second membre est composé de termes connus (soit déjà définis, soit admis comme indéfinissables). Il s'ensuit que le terme à définir ne peut figurer dans le second membre, c'est-à-dire servir à se définir lui-même ; la violation de cette règle constitue le cercle vicieux dans les définitions. Le premier membre s'appellera le *défini* et le second membre le *définissant*².

La définition est une égalité logique, disons-nous ; elle n'est cependant pas une proposition, car elle n'est ni vraie ni fausse. Le terme à définir est, par hypothèse, dénué de sens avant d'être défini (ou dépouillé du sens plus ou moins précis que l'usage lui attache) ; il n'a de sens qu'après et par la définition. On ne peut donc ni affirmer ni nier l'égalité logique du défini et du définissant ; on peut refuser de l'admettre, voilà tout. C'est en ce sens que les définitions sont dites libres ou même arbitraires ; on veut dire par là qu'elles

¹ Le présent travail est entièrement inspiré par les travaux et les théories des logiciens modernes, notamment de M. Peano et de son école. Ces théories sont résumées dans notre *Manuel de Logistique* (en préparation). En attendant, nous nous permettrons de renvoyer le lecteur à nos articles sur *Les principes des Mathématiques*, dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* (janv. 1904 et n^{os} suivants).

² Nous proposons cette expression au lieu du mot *définition*, qui serait équivoque, puisqu'il désigne déjà l'égalité du défini et du définissant. Les mathématiciens appellent souvent le définissant la *valeur* du défini ; mais ce terme est équivoque, car il désigne aussi les entités constantes qu'on substitue aux variables.

sont indiscutables et irréfutables ; on ne peut les apprécier que par des raisons de commodité, de convenance et d'usage. Dès qu'on se réfère à l'usage, c'est-à-dire au sens habituel conféré à tel terme, la définition n'est plus libre ; mais aussi ce n'est plus une définition, c'est une proposition, qui consiste à affirmer que le sens habituel de tel terme est bien le sens indiqué dans le second membre (par le *définissant*) ; cette proposition peut être vraie ou fausse, et peut être légitimement contestée, au moyen d'exemples et d'autorités. Les propositions de ce genre s'appelaient dans la logique classique *définitions de choses* ou *d'idées*, par opposition aux *définitions nominales* ou *de mots*. Les considérations précédentes nous permettent d'affirmer que toute définition proprement dite est une définition nominale. C'est d'ailleurs ce que confirme l'exemple et l'usage constant des mathématiques.

Bien qu'une définition ne soit pas une proposition, elle ne laisse pas de jouer exactement le rôle d'une proposition ou plus exactement d'une égalité logique dans tous les raisonnements. En effet, le terme défini n'a, en principe, pas d'autre sens que le définissant ; si donc il peut et doit figurer dans les raisonnements, c'est uniquement avec le sens du définissant, et par suite on peut, partout où il figure, lui substituer le définissant. Telle est la raison de cette grande règle de méthode, qu'on peut toujours substituer le définissant au défini ; règle qui est d'ailleurs la raison d'être des définitions : car ce ne serait évidemment pas la peine de définir un terme, si l'on ne devait jamais tenir compte de sa définition. Non seulement on peut substituer le définissant au défini, c'est-à-dire employer la définition comme une égalité logique quelconque, mais encore on peut en tirer une conséquence logique quelconque et employer celle-ci dans les déductions. Une telle conséquence est ce qu'on appelle une proposition *vraie par définition*. Il est assez paradoxal qu'une définition, qui n'est pas une vérité, puisse engendrer des vérités. C'est que, si l'on est libre de donner à tel terme tel sens qu'on veut, on n'est plus libre, une fois ce terme défini, de changer ou même d'ajouter quoi que ce soit au sens que lui confère la définition.

Il y a plus : pour démontrer une proposition quelconque portant sur un terme défini, il est recommandé de lui substituer son définissant. Et en effet, le défini n'existe, logiquement, que comme l'équivalent de son définissant. Si donc il possède une propriété ou une relation quelconque, c'est uniquement en vertu de sa définition, et par conséquent il est naturel de se reporter à celle-ci pour trouver la raison de cette propriété ou de cette relation.

Inversement, on peut toujours substituer le défini au définissant, puisque, en vertu de leur égalité logique, ils ont absolument le même sens. Le défini est, en général, un terme simple, par suite plus court et plus maniable que son définissant. C'est même là tout l'avantage des définitions ; c'est de permettre de substituer des termes simples à des termes plus ou moins complexes, et d'abrégé ainsi, non seulement le langage et l'écriture, mais la pensée¹. En effet, une fois qu'on a démontré certaines propriétés du terme défini (en se référant au définissant), on est dispensé de refaire les mêmes déductions et transformations, et l'on n'a qu'à retenir l'énoncé du théorème pour l'appliquer en toute occasion. Or, dans cet énoncé, le terme défini représente et remplace le définissant plus complexe ; il figure une combinaison d'idées faite une fois pour toutes, et qui doit se retrouver intégralement toutes les fois qu'on aura à appliquer le théorème. Il est donc indiqué de substituer le défini au définissant, pour mieux voir dans quels cas apparaît la combinaison en question, et pour en apercevoir tout de suite la présence. En un mot, il y a lieu de substituer le définissant au défini lorsqu'on veut remonter aux principes d'une proposition ; et, au contraire, le défini au définissant, lorsqu'on veut en tirer des conséquences.

Le fait que le terme défini sert de substitut au définissant a donné souvent à croire qu'il n'est rien de plus qu'un nom ou un symbole du définissant. Aussi beaucoup d'auteurs ont-ils considéré le défini comme un simple nom ; et cette opinion se reflète dans l'expression même de définition *nomi-*

¹ LEIBNIZ disait : « Theoremata cogitandi compendia esse » (les théorèmes sont des résumés de pensée).

nale. Mais, si l'on y réfléchit, il est absurde d'établir une égalité logique entre un nom et un concept : un nom n'est jamais un concept, mais seulement le nom d'un concept. Si le premier membre d'une définition est un nom, le second doit aussi être un nom, par raison d'homogénéité ; et alors on devra dire que le défini et le définissant sont deux noms du même concept, le premier étant seulement plus simple que le second. Mais cette conception nominaliste est trop superficielle ; car il reste à savoir pourquoi le même concept a deux noms, l'un simple et l'autre complexe. C'est que, en réalité, le concept lui-même est complexe ; sa complexité, c'est-à-dire la manière dont il est composé d'autres concepts, est exprimée par le définissant, et son unité est figurée par le défini, c'est-à-dire par le nouveau nom qu'on lui impose pour conserver et sceller en quelque sorte la combinaison de concepts qui lui a donné naissance. Dans cette conception, les deux membres de la définition ne sont pas des noms, mais des concepts, ou plutôt *le même* concept, considéré tantôt dans son unité, tantôt dans sa complexité ; et l'égalité logique exprime précisément cette identité du concept. Ainsi la définition qui, au point de vue du nominalisme vulgaire, semble n'être que l'imposition d'un nom à un concept, et qui, au point de vue du nominalisme systématique, semble n'être que l'équivalence d'un nom à un assemblage de noms, est en réalité la construction d'un concept, dont le nom ne fait que symboliser l'identité ¹.

Quoi qu'il en soit, il est toujours permis de substituer le définissant au défini partout où celui-ci figure. Il en résulte qu'aucune définition n'est indispensable théoriquement, bien qu'elle puisse être pratiquement utile et commode. On peut se passer d'une définition, à la condition de remplacer partout le défini par le définissant ; et par suite on peut (théoriquement) se passer de toutes les définitions, si l'on ne

¹ Peu importe, d'ailleurs, qu'au point de vue psychologique la définition corresponde à l'analyse d'un concept *préexistant* plutôt qu'à la construction d'un concept nouveau : les deux opérations, psychologiquement différentes, sont semblables au point de vue logique. L'une consiste à passer du premier membre au second, l'autre à passer du second membre au premier. Mais leur égalité logique subsiste et est toujours la même, car elle est symétrique. D'ailleurs, un concept n'existe en logique qu'une fois qu'il est *construit*, que sa construction ait été, ou non, précédée d'une analyse logique portant sur un concept préexistant.

recule pas devant la complication extraordinaire que cela entraînerait dans l'énoncé des propositions¹. Il en résulte cette vérité, paradoxale au premier abord, que les définitions ne font pas partie de l'enchaînement logique des propositions, puisque ces propositions pourraient se démontrer de même en l'absence des définitions. Et cela se comprend, puisque les définitions ne sont pas des *vérités*, mais des abréviations d'idées : elles ne servent nullement de principes ni de fondement à la vérité des propositions. Cette remarque a une autre conséquence curieuse : c'est que toutes les propositions d'une théorie déductive peuvent être considérées comme portant, en définitive, sur les seules notions indéfinissables de la théorie, car si, dans leur énoncé, on remplaçait tous les termes définis par leurs définissants, il n'y resterait que des termes indéfinissables. Par exemple, si l'on peut définir tous les termes de la géométrie en fonction de deux indéfinissables, le *point* et le *segment*, tous les théorèmes de la géométrie que l'on pourra démontrer seront des propositions concernant les points et les segments, quelle que soit la complication des termes dérivés qui figurent dans leur énoncé usuel. Cette remarque est l'analogue exacte de la suivante, qui est banale : à savoir que toutes les propositions d'une théorie déductive sont des conséquences logiques des propositions premières, de sorte que toute la théorie est contenue et résumée dans celles-ci, et que sa vérité dépend entièrement et uniquement de la vérité de ses propositions premières.

Toute proposition qui contient un terme défini doit en général pouvoir se démontrer par la substitution du définissant au défini. Par conséquent, les propositions premières d'une théorie doivent porter sur les notions premières de cette théorie. Définir les notions premières, c'est donner le moyen de démontrer les propositions premières. Il y a donc une corrélation intime entre le système des notions premières et celui des propositions premières. On ne peut pas ré-

¹ « Cette suppression d'un signe défini est un exercice très utile... pour vérifier l'exactitude d'une définition ; si l'on n'arrive pas à remplacer partout le signe défini par sa valeur, on déduit que la définition n'est pas énoncée en forme exacte. » G. PEANO, *Formulaire*, 1903, p. 12.

duire l'un sans réduire l'autre, ni changer l'un sans changer l'autre ¹.

L'égalité logique qui exprime la définition doit être complète et intelligible par elle-même. Par conséquent elle doit être entièrement rédigée en symboles logiques, car si on est obligé de lui adjoindre une explication verbale, on ne peut plus savoir exactement quelles notions on fait intervenir, à cause des équivoques et des sous-entendus qu'implique toujours le langage. Elle doit en outre vérifier la *loi d'homogénéité*, c'est-à-dire que les deux membres doivent renfermer les mêmes variables *réelles* ². Pour nous rendre compte de cette exigence, il convient de préciser les divers cas possibles. Le terme défini peut être, soit un terme constant (comme les nombres 0, e , π), soit un concept ou une classe (comme : nombre entier, nombre rationnel, nombre réel), soit une relation entre deux ou plusieurs termes. Dans le premier cas, il ne contient aucune variable ; dans le deuxième, il en contient une (l'élément variable de la classe) ; dans le troisième, il en contient deux ou plusieurs. Or il est évident que les deux membres d'une définition ne peuvent contenir des variables *réelles* différentes ou en nombre différent : on ne peut définir une fonction logique qu'au moyen d'une fonction des mêmes variables réelles, car autrement son sens dépendrait d'une variable que, par hypothèse, elle ne contient pas, c'est-à-dire dont elle ne dépend pas. Par conséquent, lorsque le terme à définir est constant (c'est-à-dire représente un individu), le défini doit être constant ; il doit commencer par le signe ι qui marque l'individu.

Par exemple, soit à définir le zéro arithmétique.

On ne peut pas écrire :

$$x + 0 = x$$

car le premier membre est $x + 0$, et non pas 0 ; cette éga-

¹ Bien entendu, les propositions premières peuvent contenir des notions définies, mais elles doivent, dans leur ensemble, contenir toutes les notions non définies, car autrement celles-ci ne pourraient pas figurer dans les propositions dérivées.

² G. PEANO. *Sur les définitions mathématiques*, ap. *Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. III (Paris, Colin, 1901). Une variable (logique) est dite *réelle*, dans une formule logique, lorsque le sens de cette formule dépend de la valeur qu'on assigne à cette variable. Dans le cas contraire, la variable est dite *apparente*.

lité ne pourrait définir que $x + 0$, mais non pas 0 tout seul. Il faut donc isoler 0 dans le premier membre.

On ne peut pas écrire non plus :

$$0 = x - x$$

car on ne sait pas ce qu'est le terme x ; ni :

$$n \in \mathbb{N}. \text{ } 0 = x - x$$

car le second membre contient la variable x , et l'on ne sait pas si sa valeur ne dépend pas de cette variable. Il faut démontrer que la valeur de $x - x$ ne dépend pas de x :

$$x, y \in \mathbb{N}. \text{ } x - x = y - y$$

et alors on pourra écrire la définition véritable :

$$0 = \text{ } \exists z (x \in \mathbb{N}. \text{ } z = x - x) \quad \text{Df}$$

« Zéro est le nombre z tel que $z = x - x$, quel que soit le nombre x ». Le second membre est constant, car la variable z est apparente; et il est individuel, car si $z \varepsilon$ est une classe, le théorème précédent prouve que c'est une classe singulière, de sorte qu'on a le droit de la faire précéder du signe $\text{ } \exists$.

Soit maintenant à définir un concept de classe, c'est-à-dire une fonction logique à une variable. On pourra mettre cette fonction sous la forme explicite $x \varepsilon a$, a étant la classe à définir; et le définissant sera une fonction implicite de la seule variable réelle x , soit φx . La définition aura la forme

$$x \varepsilon a . = . \varphi x \quad \text{Df}$$

On peut isoler le terme a dans le premier membre en opérant par $x \varepsilon$; on a la nouvelle forme :

$$a . = . x \varepsilon \varphi x \quad \text{Df}$$

qui est la plus fréquente. Dans ce cas, la variable x n'est qu'apparente au second membre. Ainsi, quand le terme défini est une classe, le définissant doit être lui-même une classe (ce qui arrive, en particulier, quand il commence par $x \varepsilon$). Exemple :

$$\text{Np} = (1 + \text{N}_1) \cdot [(1 + \text{N}_1) \times (1 + \text{N}_1)] \quad \text{Df}$$

« Un nombre premier est un nombre supérieur à 1 qui n'est pas le produit de deux nombres supérieurs à 1. »

De même, pour définir une fonction (non propositionnelle) à une variable, on devra employer une fonction à une variable. Exemple :

$$a \in \mathbb{Q} - 1, x \in \mathbb{Q}, \text{ } \log_a x = \text{ } \overset{1}{\text{q}} \overset{z}{z} (a^z = x) \quad \text{Df}$$

« a et x étant des nombres réels positifs et a différent de 1, le logarithme de x , à base a , est le nombre réel z tel que $a^z = x$. » Le signe $\overset{1}{\text{q}}$ suppose que le nombre z existe et est unique (pour une valeur déterminée de x), c'est-à-dire que la fonction $\log a$ est uniforme.

La même fonction $\log_a x$ peut être considérée, non plus comme une fonction de la seule variable x , mais comme une fonction des deux variables x et a . Dans un cas comme dans l'autre, la définition précédente sera homogène, puisque le définissant contient lui aussi les lettres a et x . La lettre z est une variable apparente, à cause du symbole $z \exists$.

De même, on définira la différence de deux nombres entiers comme suit :

$$a \in \mathbb{N}_0, b \in a + \mathbb{N}_0, \text{ } b - a = \text{ } \overset{1}{\text{N}_0} \overset{x}{x} (x + a = b) \quad \text{Df}$$

« a et b étant des nombres entiers, b supérieur à a , $b - a$ désigne le nombre entier x tel que $x + a = b$. » Le signe $\overset{1}{\text{N}_0}$ suppose qu'on a démontré l'existence et l'unicité de x . Le terme défini ($b - a$) est fonction de a et de b ; le définissant contient les mêmes lettres; la lettre x est une variable apparente.

Enfin, voici un exemple d'une relation à deux termes, c'est-à-dire d'une fonction propositionnelle de deux variables :

$$a, b \in \mathbb{N}_0, \text{ } a \leq b. = . b \in a + \mathbb{N}_0 \quad \text{Df}$$

« a , b étant des nombres entiers, dire que « a est inférieur ou égal à b », c'est dire que b est la somme de a et d'un nombre entier. » Ce qu'on définit ici, c'est la relation $a \leq b$, c'est-à-dire le signe \leq ; a et b sont les termes variables de cette relation; ils figurent également dans le définissant.

Voici maintenant des exemples de définitions vicieuses, qui

pèchent contre la loi d'homogénéité. On croit souvent pouvoir définir les fractions en posant :

$$a, b, c, d \in \mathbb{N}. \circ : a/b = c/d. = . ad = bc$$

Or ce n'est pas là une définition des fractions a/b et c/d , mais tout au plus une définition de l'égalité de ces fractions. Encore faut-il remarquer que les termes de cette relation ne sont pas les fractions a/b , c/d , mais bien les quatre nombres entiers a , b , c , d ; car c'est eux qui figurent comme variables dans le définissant, et non pas les fractions a/b , c/d . L'exemple suivant montrera mieux la légitimité de cette distinction. On croit pouvoir définir le produit de deux fractions comme suit :

$$a, b, c, d \in \mathbb{N}. \circ . (a/b) \times (c/d) = ac/bd.$$

Le premier membre est ou devrait être une fonction des deux fractions a/b , c/d , tandis que le second membre est une fonction des quatre termes. Pour prouver qu'une telle définition est incorrecte, supposons qu'on définisse comme suit une opération désignée par ? sur les fractions :

$$a, b, c, d \in \mathbb{N}. \circ . (a/b) ? (c/d) = (a + c)/(b + d)$$

En vertu de cette définition : $(1/2) ? (2/3) = (3/5)$, $(2/4) ? (2/3) = (4/7)$;

Or, $1/2 = 2/4$, donc les deux résultats doivent être égaux :

$$3/5 = 4/7$$

ce qui est faux. On est arrivé à cette absurdité, parce qu'on a pris pour variable d'un côté la fraction comme un tout, et de l'autre côté ses termes. Au fond, il faudrait distinguer la fraction, comme ensemble de deux nombres entiers, du nombre rationnel qui en est la valeur, et qui est la valeur commune de toutes les fractions « égales ». Quand on dit : « la fraction $2/3$ est irréductible », on ne peut pas en conclure : « la fraction $4/6$ est irréductible », et pourtant elle est égale à la précédente. L'irréductibilité est une propriété de la fraction, et non du nombre rationnel qui est sa valeur. Or, quand on définit la somme ou le produit de deux fractions, on définit en réalité la somme ou le produit des nombres

rationnels correspondants. Il faut donc définir la somme et le produit de deux nombres rationnels x et y par une fonction de x et de y , et non par une fonction des termes des fractions qui leur correspondent, car ces termes ne sont pas fonctions des nombres rationnels : parler du « numérateur de x » ou du « dénominateur de x » n'aurait pas de sens ¹.

Une définition définit en général une classe ², à savoir la classe des objets qui possèdent les caractères ou propriétés indiqués par le définissant. D'ailleurs, tout concept étant représenté dans le calcul logique par son extension, on peut dire que sa définition détermine son extension. Or cette extension peut être quelconque ; autrement dit, la classe définie peut contenir un ou plusieurs individus, ou une infinité, ou aucun. Que ce dernier cas soit possible, c'est ce dont on se rendra compte, si l'on réfléchit qu'on peut (et que parfois même on doit) définir des concepts absurdes, quand ce ne serait que pour pouvoir raisonner sur eux et en prouver l'absurdité (exemples : le plus grand des nombres entiers ; une fraction égale à une fraction irréductible, et dont les termes soient respectivement inférieurs à ceux de celle-ci ³). Or ce que l'on a en général l'*intention* de définir, c'est un objet existant et unique. Dans ce cas, il est nécessaire de démontrer (ou de postuler) que l'objet existe et qu'il est unique, c'est-à-dire, en termes de calcul logique, que la classe définie n'est pas nulle et qu'elle ne contient qu'un individu. Cette double proposition (*existence* et *unicité* de l'objet défini) peut parfois précéder la définition au lieu de la suivre ; mais, dans tous les cas, elle est indispensable pour qu'on puisse appliquer au terme en question le signe ι , ou l'article défini *le*, qui suppose l'existence et l'unicité de l'objet. Par exemple, on peut définir le terme « parallèle menée à une droite par un point extérieur » ; il ne s'ensuit, ni qu'une telle parallèle existe, ni qu'elle soit unique. On démontrera (ou on postulera) son existence et son unicité, et alors, mais alors seulement, on

¹ G. PEANO, *loc. cit.*

² C'est ce qui arrive, notamment, quand le définissant commence par x ϵ .

³ EUCLIDE (IX, 20), pour prouver que le nombre des nombres premiers est infini, dit : Posons : $\delta\epsilon$ = le plus petit commun multiple de tous les nombres premiers ; puis il démontre que $\delta\epsilon$ n'existe pas.

pourra parler de « la parallèle menée à une droite par un point extérieur », car cette expression implique que cet objet existe et est bien déterminé.

Ainsi l'on ne peut jamais déduire d'une définition l'existence de son objet; il faut toujours démontrer celle-ci ou la postuler; et tous les théorèmes d'existence se démontrent au moyen de postulats existentiels¹. Bien plus, on n'a pas le droit d'invoquer une définition, et de faire intervenir le terme défini dans un raisonnement, avant d'avoir prouvé qu'il existe; en effet, il s'agit ici de l'existence logique: un objet existe dès que sa notion n'est pas contradictoire, ou contraire à quelque autre loi logique. Or, comme Leibniz l'a déjà remarqué, d'une notion contradictoire ou absurde on peut démontrer tout ce qu'on veut, car on peut en déduire des propositions contradictoires². C'est pourquoi le premier théorème qui suit une définition porte en général sur l'existence de l'objet défini.

Une autre conséquence de cette théorie est qu'on ne peut pas *créer* un objet par une définition. C'est une illusion fréquente chez les mathématiciens, de croire que les définitions sont créatrices, et qu'un objet quelconque existe *par définition*, par le seul fait qu'on l'a défini. Il suffit, pour la dissiper, de rappeler qu'on peut définir les notions les plus chimériques et les plus absurdes, et raisonner ensuite sur elles (pour en montrer l'absurdité, et par suite la non-existence de leur objet). C'est surtout dans la généralisation du nombre qu'on est tenté d'employer le procédé trop commode des définitions créatrices, de *poser* un symbole ou un ensemble de symboles, et de définir ses propriétés à coups de *conventions*. Cette méthode est d'autant plus contraire à la logique que, généralement, ces *conventions* ont pour effet de rendre possibles des opérations auparavant impossibles (retrancher un nombre d'un nombre plus petit, diviser un nombre par un autre qui ne le divise pas « exactement », extraire une racine d'un nombre qui n'a pas de racine), c'est-à-dire sont contradictoires avec les lois du calcul précédemment éta-

¹ V. *Les principes des mathématiques*, ch. VI: La géométrie.

² C'est même là une manière de prouver qu'une notion est contradictoire.

blies ¹. En général, il faut se défier des *conventions* en mathématiques : elles recouvrent trop souvent des sophismes ou tout au moins des pétitions de principe. Il n'y a rien de conventionnel en mathématiques (pas plus que dans aucune science logique et rigoureuse), en dehors des définitions ; et encore, la part de la convention s'y réduit-elle au choix du nom (qui n'est arbitraire qu'en théorie, mais qui pratiquement est le plus souvent dicté et presque imposé par l'usage ou par l'analogie). Aussi le mot de *convention* devrait-il être rayé du langage mathématique, dans l'intérêt de la rigueur logique, et nous dirions presque de la loyauté scientifique. Ce qu'on appelle *convention* est, ou bien une définition ou une imposition de nom, ou bien une hypothèse ou un postulat. Dans les deux cas, il est plus correct et plus précis d'employer ces dernières expressions. En dehors de ces deux cas, une convention ne peut être qu'un moyen d'éluder, soit une explication, soit une démonstration, c'est-à-dire un expédient sophistique ou paresseux ².

Nous avons dénoncé plus haut le préjugé nominaliste, qui est le péché mignon des mathématiciens. Il consiste, en général, à croire ou à dire que les mathématiques n'opèrent que sur des symboles. Le bon sens objecte que des symboles sont toujours symboles de quelque chose, à savoir d'une idée ou d'un objet ; mais les mathématiciens mettent leur coquetterie à manier des symboles qui ne soient symboles de rien, c'est-à-dire en somme des signes vides de sens. A ce point de vue, ils diront qu'une définition consiste à poser l'équivalence d'un symbole nouveau et d'un système de symboles anciens ; et ils méconnaîtront ce fait que, par là même, on assigne au nouveau symbole un sens (représenté par le système des symboles anciens), c'est-à-dire qu'on le fait correspondre à un *nouveau concept* dont le définissant figure la composition et

¹ Une vive et juste critique des *définitions créatrices* a été faite par M. FREGE en maint endroit, et notamment dans les *Grundgesetze der Arithmetik*, t. II (1903).

² Lorsqu'on assimile les lois mathématiques aux règles conventionnelles d'un jeu comme les cartes ou les échecs, on fait complètement abstraction de la *valeur de vérité* que possèdent les propositions, et par suite de leur valeur scientifique. Un coup d'échecs n'est pas une proposition ; il n'affirme rien et ne signifie rien. Il n'en est pas de même des formules mathématiques, de sorte que toute analogie tombe en défaut. Nous empruntons cette pensée, avec beaucoup d'autres, à M. FREGE, qui est le plus rigoureux des mathématiciens-logiciens de notre temps.

la structure. En un mot, la définition consiste à former un nouveau concept, et à lui imposer un nom. Toutefois, moyennant cette réserve capitale, on pourra dire qu'une définition introduit un nouveau symbole dans le calcul, ou un nouveau nom dans le langage, et la considérer comme une simple imposition de nom ou une abréviation d'écriture ; car si ce n'est pas tout, ni même l'essentiel, c'est du moins la moitié de la vérité.

Néanmoins, le préjugé nominaliste est si répandu et si ancré dans les esprits, qu'il doit avoir quelque raison d'être ou quelque excuse. Et en effet, comme toute erreur, il renferme une âme de vérité, que voici. C'est que, dans une théorie déductive, la vérité des propositions qu'on déduit des principes est indépendante du sens des notions premières. En effet, ces notions n'étant pas définies, leur sens intrinsèque n'intervient pas, *ne peut pas* intervenir dans les déductions ; celles-ci reposent entièrement sur les propositions premières, qui établissent des relations extrinsèques entre les notions premières. Il en résulte que tout autre système de notions premières qui vérifiera les mêmes postulats vérifiera toutes les propositions qui en dérivent. On est ainsi amené à faire abstraction du sens des notions premières, à les réduire à des symboles vides de sens, et à considérer la théorie comme portant uniquement sur ces symboles. Une telle abstraction est légitime, au point de vue de la logique formelle, et ce n'est pas une erreur, tant qu'on ne nie pas l'existence des concepts que l'on néglige. Elle provient, on le voit, du caractère *formel* des déductions mathématiques ; elles s'appuient exclusivement sur la forme des propositions, et ne dépendent en aucune manière de leur contenu conceptuel, c'est-à-dire de la nature des notions qui en seront les termes. Cela ne veut pas dire, évidemment, que chaque proposition, prise isolément, soit intelligible, quand on n'attribue à ces termes aucun sens particulier ; mais seulement que leur enchaînement logique, leur relation de principe à conséquence, est indépendant du sens des termes, et subsiste lorsque ce sens varie, tout en continuant à vérifier les propositions premières. On conçoit donc une théorie mathé-

matique comme une pure forme de raisonnement, vide de contenu, où la place des notions est marquée par des symboles, et c'est ainsi qu'on aboutit à la considérer comme portant sur ces symboles. Ce qu'il y a de vrai, c'est que son contenu, toujours indispensable, et sans lequel elle n'aurait aucun sens, est indéterminé (dans certaines limites), et qu'elle peut s'appliquer à plusieurs systèmes de notions qui vérifient également ses principes¹. Ces systèmes de notions sont alors considérés comme des *interprétations* diverses de l'ensemble des symboles non définis qui figurent dans les formules de la théorie; et c'est en ce sens qu'on peut dire qu'une théorie déductive est indépendante de l'interprétation qu'on donne à ses symboles non définis².

D'ailleurs, il est clair que, dès qu'on a choisi une interprétation pour les symboles non définis, le sens de tous les autres symboles se trouve déterminé par là même, puisqu'ils sont définis au moyen des symboles non définis. Mais il importe de se rendre compte des conséquences de cette conception *formaliste* des mathématiques: du moment qu'une théorie mathématique n'est qu'un ensemble de déductions formelles dont la vérité est indépendante de la matière à laquelle on les applique, elle n'est plus qu'une conséquence des lois logiques, et la mathématique ainsi conçue n'est pas autre chose qu'un prolongement de la logique formelle.

LOUIS COUTURAT (Paris).

¹ Pour bien comprendre cette distinction, il suffit de penser à une équation algébrique contenant plusieurs variables; cette équation peut être vraie pour certains systèmes de valeurs, et fautive pour les autres; mais elle n'a de sens (elle n'est vraie ou fautive) que si l'on assigne aux variables des valeurs déterminées, d'ailleurs quelconques. Si l'on n'assigne aucune valeur aux variables, l'équation n'est plus qu'une forme vide et insignifiante, le schéma d'une infinité de propositions possibles, où les lettres x, y, z ne font que marquer la place des termes indéterminés, mais ne la remplissent pas.

² Bien entendu, une théorie déductive, étant un système d'implications, est *toujours vraie*. même pour les interprétations qui ne vérifient pas ses principes, puisqu'une implication est vérifiée dès que son hypothèse est fautive. Mais on a l'habitude de ne considérer comme intéressants que les cas où les principes sont vérifiés, et alors, la théorie n'est vraie que si les conséquences sont aussi vérifiées.
