kopische Doppelsterne (2 st.); Methode der kleinsten Quadrate (1 st.). — SCHRAM: Kalendariographie und Umrechnung von Daten verschiedener Zeitrechnungen (2 st.).— M. HERZ: Die Störungen der Rotationsachse der Erde (2 st.). — G. JÄGER: Prinzipien der Mechanik (2 st.). — A. LAMPA: Elementare Mechanik (2 st.).

Durant le semestre d'hiver 1903-1904) l'Université de Vienne a compté 5906 étudiants réguliers et 1832 auditeurs parmi lesquels 90, respectivement 131 dames; la fréquence est donc au total de 7738.

Zurich, *Ecole polytechnique, section normale des sciences mathématiques* (18 avril; 4 août). — HIRSCH: Integralrechn. 4, Repetitorium 1, Uebg. 2; Funktionentheorie 4. — FRANEL: Calcul intégral 4, Rép. 1, Exerc. 2. — HERZOG: Mechanik I, Rep I, Uebg. 2. — M. FIEDLER: Darst. Geometrie 2, Rep. 1, Uebg. 4; Zentralprojektion und Zyklographie 2; Elemente d. analyt. Geom. der Lage, 2. — LACOMBE: Géométrie descriptive 2, Rép. 1, Exerc. 4. — GEISER: Analyt. Geometrie II, 2; alg. Flächen 4.— HURWITZ: Alg. Gleichungen 4; Fourier'sche Reihen 2. — ROSENMUND: Vermessuegskunde 5, Rep. 1; Uebg. 1 tag. — WOLFER: Geogr. Ortsbestimmung 3; Uebg. im ast. Beobachten 3; Einl. in die Astrophysik.

Zurich, *Universität* (12 April; 30 Juli 1904). — BURKHARDT: Alg. Analysis, 3; Differential-und Integralrechnung II, 2; Partielle Differentialgleichungen der Physik, 3; Mathematisches Seminar, 2. — WEILER: Darstellende Geometrie, mit Uebungen, II. Teil, 3; Synthetische Geometrie (Forts.), 2; Analyt. Geometrie, II, 3; Politische Arithmetik mit Uebungen (für Lehramtskandidaten), 2. — E. GUBLER: Inhalt und Methode des geometrischen Unterrichts in der Mittelschule, 2.; Algebraische Analysis mit Uebungen (für Lehramtskandidaten), 2, Politische Arithmetik mit Uebungen (für Lehramtskandidaten), 2. — A. WOLFER (v. ci-dessus, Ecole polytechnique).

BIBLIOGRAPHIE

G. ROBIN. — **Œuvres scientifiques.** Réunies et publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique par L. RAFFY. *Thermodynamique générale.* Un vol. XVI-271 p.; Gauthier-Villars, Paris, 1901.

La Thermodynamique générale, ou la science des équilibres et des modifications de la matière, et dont un cas particulier est la mécanique classique qui n'étudie que les équilibres de position et les déplacements, forme le second volume des Œuvres scientifiques de Robin. M. Raffy, en profitant de divers matériaux laissés par Robin et de quelques leçons professées à la Sorbonne a reconstruit, avec des éléments fort épars, l'œuvre profondément originale de Robin.

Cette Thermodynamique générale s'éloigne beaucoup de l'exposition presque traditionnelle; Robin expose des idées si nouvelles et sous une forme si originale, qu'on ne saurait en quelques pages, donner qu'une idée bien imparfaite de son ouvrage. Ces idées ont en France un apôtre en M. Duhem dont les travaux sur la Thermodynamique, sur l'évolution de la mécanique présentent bien des points de contact avec les idées de Robin.

L'introduction, reproduite d'après la leçon inaugurale au cours de Chimie-physique, jette d'ailleurs aussitôt beaucoup de lumière sur les idées de Robin. Le but de la science étant de connaître le nombre des phénomènes prévus et de les prévoir avec une précision égale à celle de nos procédés d'observation, nous ne pouvons l'atteindre qu'avec l'induction. Donc la méthode inductive est la seule rationnelle. Au contraire on a toujours cherché à procéder par déduction, comme on a fait dans presque toutes les théories mécaniques ou de physique mathématique. Robin est donc anti-mécaniste et c'est à peine s'il reconnaît les mérites de ces théories pour la constitution de la science. Et dans le cours du livre il est toujours aux prises avec la mécanique classique; il va jusqu'à dire que le procédé habituel de la science consiste à traduire des mots par des équations. Il n'est pas même de l'école de Gibbs; il veut absolument écarter toutes les méthodes qui tendent à déterminer les phénomènes par des considérations « à priori » mécaniques, analytiques, etc., pour ne se tenir qu'à l'induction. Pour cela il veut formuler des inductions de manière qu'elles soient susceptibles de vérification directe et qu'elles soient encore énoncées par des lois intégrales; car il veut s'interdire toute hypothèse portant sur l'infiniment petit. Il ne raisonne que sur des opérations réalisables et n'introduira que des grandeurs accessibles à l'expérience : ce n'est pas tout; il bannit les mots d'énergie, d'entropie, de force: concept vague et obscur qui doit être substitué par celui bien plus précis de travail qu'accompagne le déplacement de poids. On trouvera cela, peut-être, un peu excessif. Mais il est bien certain qu'après avoir fait « tabula rasa » les reconstructions ne laisseront subsister aucune indétermination, aucune obscurité ?

Un système de poids est un système S_1, composé par des solides indéformables, fluides incompressibles, etc., dont les parties mobiles sont bien polies, et qui ne peut éprouver d'autre modification qu'un changement de configuration. Considérons un autre système S placé dans une source, corps de masse très grande par rapport à S et dont l'état est complètement déterminé par sa température, qui, seule, peut changer, et qui recueillera ou fournira toute la chaleur qu'il pourra mettre en jeu. Supposons S en relation avec S_1, avec lequel il ne peut changer de chaleur; enfin ces deux systèmes ainsi que les sources qui les entourent forment une partie de l'univers complètement isolée. A deux états d'équilibre de S correspondent deux autres de S_1, qui diffèrent par le déplacement de certains corps extérieurs. Soient: P le poids de l'un des corps déplacés; z_0 et z_1 les coordonnées du centre de gravité (z est vertical, dirigé en bas); alors le travail mis en jeu dans le passage du premier au second état est exprimé par

$$T = \Sigma P(z_1 - z_0) .$$

Il est bien vrai que dans quelques cas particuliers, il est facile de former le système S_1; mais on doit avouer qu'on ne voit pas bien si ce concept nouveau a sur l'ancien de plus grands avantages de précision et de clarté. S étant donné, pourra-t-on lui faire toujours correspondre (construire) S_1? Cette définition une fois admise (Robin a soin de faire voir sa coïncidence avec celle de la mécanique seulement en quelques cas), il est vrai, les choses se passent très bien et avec généralité.

Si S_1 est de même nature que S, rompons ses communications avec S et mettons-le en relation avec un système de poids S_2, de manière qu'il puisse passer exactement par les mêmes états et dans les mêmes conditions de temps que quand il était en relation avec S. Une fois cette possibilité admise (Robin ne la démontre pas), soit T_1 le travail consommé par S_1, suivant la définition déjà donnée, dans le passage de A à A′ ; alors celui de S est, par définition, — T_1 , pourvu que l'on prouve que si S est mis en relation directe avec un autre système de poids, il consomme précisément un travail — T_1.

Cette preuve est donnée après avoir établi le principe de Mayer sur l'équivalence de la chaleur et du travail. C'est ici, selon nous, que commence la partie la plus originale et fort intéressante de Robin.

Dans le principe de Mayer il distingue deux parties : le principe du cycle fermé et celui de l'état initial et final. Dans le premier, un système en équilibre subit, sous l'action d'un système de poids une série de modifications qui le ramènent à son état initial, en consommant un travail égal à la somme des quantités de chaleur qu'il a dégagées dans les diverses sources, multipliées par l'équivalent mécanique de la chaleur ; dans le second, si un système dans deux processus qui l'amènent à deux états d'équilibre consomme les travaux T et T′ et dégage les quantités Q et Q′ de chaleur, alors

$$T - JQ = T' - JQ' \ .$$

Ce second principe est essentiellement différent du premier auquel il peut être réduit dans le cas des phénomènes *renversables;* c'est-à-dire quand il est possible de le ramener à son premier état au prix d'un travail égal et de signe contraire à celui qu'a mis en jeu la transformation directe.

De ces deux principes on peut déduire non seulement le théorème sur le travail, mais encore on peut démontrer les principes de Mayer lorsque S est en relation avec un système quelconque.

Le chapitre III est destiné à la notion si fondamentale de réversibilité. Soit un système S qui, mis en relation avec S_1, passe d'un état initial d'équilibre à un état final en traversant des états intermédiaires aussi nombreux que l'on voudra et soit T la somme algébrique des travaux mis en jeu dans chaque étape.

Supposons qu'en mettant S en relation avec S'_1 on puisse le faire repasser, en sens inverse, par ces mêmes états intermédiaires, et soit T′ le travail total mis en jeu dans cette seconde transformation. Les deux transformations sont *réversibles* si $T + T'$ tend vers zéro, lorsque le nombre des états intermédiaires augmente indéfiniment ; une transformation ne sera jamais considérée comme réversible, tant que ne sera pas indiqué la composition et le mode d'agir des deux systèmes étrangers S_1, S'_1 ; l'un déterminant la *production* du phénomène; l'autre effectuant sa *réversion.* Une opération réversible doit s'effectuer avec une extrême lenteur; une modification réversible est renversable.

La distinction essentielle de deux principes de Carnot est, croyons-nous, de Robin. Le premier principe affirme que lorsqu'un système, primitivement en équilibre, a parcouru un cycle de transformations qui le ramènent à son état initial, ce système n'a pu produire de travail que s'il a échangé de la chaleur avec deux sources au moins. S'il a échangé de la chaleur avec une source ou avec aucune (cycle monothermique) alors $T \geqq 0$, et si le cycle est réversible $T = 0$.

Le second principe dit que dans tout cycle monothermique irréversible il y a consommation de travail.

Ce second principe est bien distinct du premier dans lequel n'intervient pas la notion de réversibilité et il est énoncé de manière à être directement vérifiable par l'expérience; et s'il n'intervient que pour une faible partie dans l'établissement des relations fondamentales de la Thermodynamique, il constitue, à lui seul, le fondement de la statique générale.

Robin avec rigueur et élégance sait déduire beaucoup de conséquences; l'une des plus importantes est que le travail est un invariant des transformations thermiques réversibles ; ou, le travail isothermique réversible est un invariant.

C'est ici vraiment qu'aurait dû se placer la notion de potentiel interne d'un système qui se rattache précisément aux modifications isothermiques. En effet le travail d'un système est la différence des valeurs que prend une certaine fonction, déterminée à une fonction près de la température absolue; c'est le potentiel interne de Massieu, ou thermodynamique de Helmholtz et de M. Duhem, identique à celui des forces intérieures de la mécanique classique.

L'application, bien simple, à la recherche du potentiel isothermique des corps isotropes élastiques et la recherche des conditions auxquelles doivent satisfaire les constantes λ et μ de Lamé avait été déjà indiquée par Beltrami. Après avoir défini le potentiel externe et total, on est conduit à la condition générale de l'équilibre isothermique stable (potentiel total minimum) et à la démonstration du théorème célèbre de Lagrange-Dirichlet, par des considérations d'équilibre seulement, ce qui n'est pas possible, comme on sait, dans la statique classique.

D'après les principes de Carnot nous ne pouvons affirmer qu'un cycle monothermique décrivant un cycle au cours duquel il fait varier la température de deux sources, doit emprunter de la chaleur à la source *chaude* et en céder à la *froide*. Or, en étudiant les cycles où les modifications isothermiques s'alternent avec des modifications adiabatiques et en s'appuyant sur un fait expérimental relatif à l'hydrogène, on peut *démontrer* ce principe pour le corps thermométrique avant tout (hydrogène) et puis pour un système quelconque

Les applications nombreuses à la chimie; à la théorie de la pile; aux gaz parfaits et aux déformations permanentes, montrent la grande généralité des principes exposés. Un seul chapitre est dédié à la dynamique générale. Robin est toujours fidèle à sa méthode : l'extension du principe de l'équivalence, lui fournit, après l'introduction des variables intrinsèques normales, l'équation fondamentale. Par différentiation on déduira les équations différentielles de la Dynamique qui peuvent s'interpréter d'une façon tout à fait semblable à celle de la mécanique classique.

Un dernier chapitre contient quelques résultats obtenus par Robin au commencement de sa carrière scientifique.

Le livre est écrit avec une extrême clarté et on peut le lire sans avoir des connaissances trop étendues en Analyse. M. Raffy en publiant la partie maîtresse de l'œuvre scientifique de Robin a rendu un véritable service à la Science. R. MARCOLONGO (Messine).

C. BURALI-FORTI. — **Lezioni di Geometria metrico-proiettiva.** (*Biblioteca matematica,* vol. X.) — Un vol. gr. in-8°, 308 p.; prix : L. 8. — ; Bocca frères, Turin, 1904.

Ce nouveau livre de M. le prof. Burali-Forti n'est pas une reproduction de l' « *Introduction à la Géométrie différentielle* » (Paris, 1897); en effet, celle-ci ne parlait qu'incidemment de la méthode de Grassmann et de ses applications à la Géométrie différentielle, tandis que le nouveau livre contient un exposé très complet de cette méthode et toutes les applications fondamentales à la Géométrie projective et à la Géométrie métrique. Mais l'ancien traité est encore très utile dans une première préparation : il peut servir comme introduction au traité plus complet que nous allons analyser.

Un avertissement est avant tout nécessaire : on ne doit pas croire que ce traité s'adresse seulement à ceux qui sont en possession de nombreuses connaissances mathématiques ; non, car il ne demande que la connaissance de la géométrie élémentaire, de l'algèbre, des premiers éléments du calcul différentiel. De plus l'auteur a voulu conserver aux propositions leur forme habituelle, ce qui contribue à faciliter la lecture du livre : il a dû faire une exception à propos des énoncés qui se rapportent à l'homographie (transformation projective), car il l'a considérée explicitement comme opération qui transforme les éléments d'une figure a dans ceux d'une figure b et non comme opération unique qui peut indifféremment s'appliquer à la première et deuxième figure.

Le livre se divise en *cinq parties.* Dans les deux premières on trouve les points fondamentaux de l'algorithme géométrique de Grassmann : après avoir étudiés les sommes et les produits de points et vecteurs, on en fait des applications à l'étude des coordonnées cartésiennes et polaires et à l'analyse de quelques-unes des courbes les plus importantes, sans excepter l'hélice circulaire et les courbes tracées sur le tore. L'étude des formations géométriques (qui permettent d'exprimer linéairement toute transformation par des transformations fixes) et de leurs coordonnées donne comme application la Géométrie analytique cartésienne, et son algorithme, consistant uniquement dans la recherche d'équations de points, droites, plans, lignes, surfaces, etc., quoique virtuellement contenu tout entier dans le livre, n'y reçoit aucune application, car la méthode de Grassmann permet d'introduire directement les *notions* géométriques dans les calculs.

La notion de position (*posit* a, notation qu'on doit lire *position* (positio) *de a*) permet (n° 43) de définir très simplement les éléments projectifs point, droite et plan. La loi de dualité énoncée sous une forme plus précise que d'ordinaire (49-51), découle directement des lois de dualité des formations, qui sont les suivantes :

Pour l'espace : de toute propriété des formations exprimable en les reliant uniquement par les opérations somme, produit par un nombre, produit progressif ou régressif, on conclut toujours une nouvelle propriété par le changement des F_1 dans[1] les F_3, des F_3 dans les F_1, laissant fixes les F_2 et F_4 (nombres).

---

[1] F_1, F_2, F_3, F_4, formes projectives de 1re, 2me, etc. espèce.