Sur un théorème de la géométrie riemanienne.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

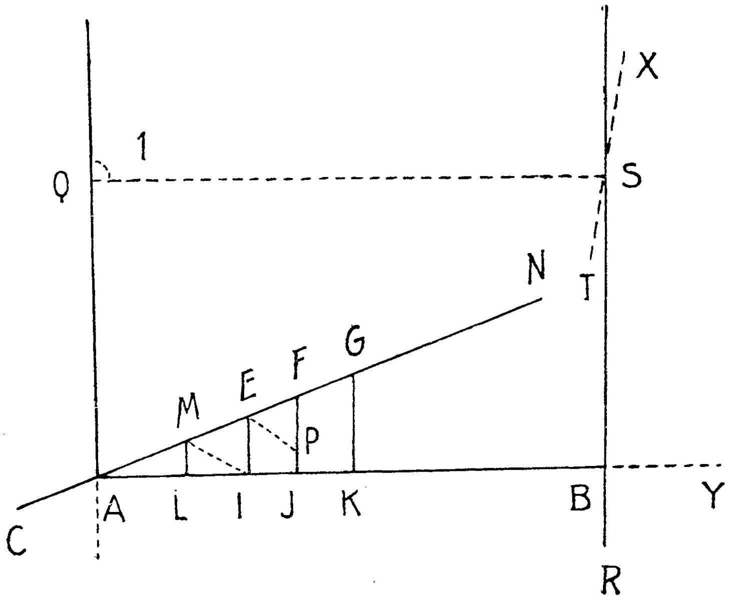
chacun des autres cercles tritangents, on obtient des résultats analogues sur lesquels je crois inutile d'insister.

P. Barbarin (Bordeaux).

Sur un théorème de la géométrie riemanienne.

Messieurs les Directeurs,

En partant de la supposition que *la somme des angles d'un triangle puisse être supérieure à 2 droits, on démontre que toutes les droites situées dans un plan sont concourantes*. Cette démonstration peut s'effectuer de différentes façons. Je crois que celle que je donne ci-dessous est nouvelle et mérite d'être signalée aux lecteurs de *L'Enseignement mathématique*.



Soient CN et RS deux droites quelconques situées dans un même plan (fig. 1).

Prenons un point A sur l'une d'elles, CN, et menons AB perpendiculaire sur la seconde.

1° Considérons d'abord le cas le plus général où AB est perpendiculaire sur RS sans l'être sur CN. Si BAN est l'angle aigu déterminé en A, portons sur AN, et à partir de A, un nombre quelconque de longueurs égales entre elles AM, ME, EF, FG ,... , puis abaissons sur AB les perpendiculaires ML, EI, FJ, GK ,... . Nous allons d'abord montrer que les longueurs AL, LI, IJ, JK....., ainsi déterminées, vont en augmentant à mesure que l'on se rapproche de B.

Commençons par prouver que nous avons AL $<$ LI. Si nous supposons pour un instant que ML, au lieu d'être la perpendiculaire abaissée du milieu de AE sur AB, soit la perpendiculaire élevée sur le milieu de AI, nous verrons que son extrémité serait alors plus rapprochée de E que de A. En effet, menons MI. Dans le triangle rectangle AEI, l'angle AEI doit être plus grand que le complément de EAI, sinon la somme des trois angles de ce triangle ne pourrait être supérieure à deux droits. Par suite, cet angle AEI doit être plus grand que EIM qui est précisément le complément de AIM et aussi celui de son égal EAI dans le triangle AMI qui serait isocèle d'après notre hypothèse provisoire. Nous en déduisons que, dans le triangle MIE, le côté MI est plus grand que ME, comme opposé au plus grand angle. Et, comme dans le cas de cette supposition provisoire, MI = MA, on aurait donc ME < MA. Par suite, puisque la perpendiculaire élevée sur le milieu de AI aboutirait à un point plus rapproché de E que de A, nous devons en conclure que la perpendiculaire abaissée du milieu de AE sur AB aura évidemment son pied plus rapproché de A que de I; nous avons donc AL < LI.

Nous allons maintenant prouver que l'on a LI < IJ. Prenons JP = LM et menons EP. La somme des angles du quadrilatère birectangle LMFJ devant être supérieure à 4 droits, la somme des deux angles MFJ et FML doit évidemment être supérieure à 2 droits.

Si, pour un instant, nous supposons que EI, au lieu d'être la perpendiculaire abaissée du milieu de MF sur LJ, est, au contraire, la perpendiculaire élevée sur le milieu de LJ, nous voyons immédiatement que les angles EPJ et EML seraient alors égaux et auraient par suite le même supplément EPF. Donc, pour que la somme MFJ + FML soit supérieure à 2 droits, il faut nécessairement que le premier de ces deux angles soit supérieur à EPF. Dans le triangle EFP, EP serait donc plus grand que EF comme opposé au plus grand angle. Mais notre hypothèse provisoire entraînant EP = EM, il en résulte ME > EF ; ce qui signifie que le sommet de la perpendiculaire élevée sur le milieu de LJ serait plus rapproché de F que de M. Par suite, le pied de la perpendiculaire abaissée du milieu de MF sur LJ sera en réalité plus près de L que de J. Nous avons donc LI < IJ.

Il sera tout aussi facile d'établir en troisième lieu que IJ est plus petit que JK, et ainsi de suite. Or, en admettant même que les perpendiculaires abaissées des points M, E, F, G ,... , ne déterminent que des segments égaux sur AB, il nous serait déjà aisé de prouver que les droites CX et BS se coupent ; car, si l'un de ces segments est contenu plus de n fois (n désignant un nombre entier), et moins de (n + 1) fois dans AB, il suffit de porter (n + 1) fois la longueur AM sur la direction AX, à partir de A, pour obtenir quelque part sur AX un point tel que la perpendiculaire menée de ce point sur la direction ABY tombe au delà de B, AX prolongé *rencontrant alors nécessairement RX au-dessus de AB. A fortiori* en sera-t-il ainsi lorsque les segments déterminés sur AB par les perpendiculaires iront en croissant de A vers B. Les deux droites considérées sont donc concourantes au-dessus de AB. C. Q. F. D.

2° Examinons maintenant le cas particulier où les deux droites considérées AQ et BS sont perpendiculaires à une troisième AB. Prenons AQ = BS et menons QS. Dans le quadrilatère birectangle isocèle ABQS, les deux angles égaux en Q et en S sont obtus.

Soit TX la perpendiculaire en S sur QS ; elle tombe nécessairement à l'intérieur de l'angle obtus QSB. Les deux droites AQ et TX font donc, la première, un angle aigu 1 au-dessus de QS, la seconde un angle droit QSX avec QS. Nous sommes alors ramenés au premier cas, ou cas général. Par suite, les deux droites considérées, suffisamment prolongées, se rencontreront au-dessus de QS; mais, comme AQ ne saurait rencontrer TX sans couper d'abord la droite BS prolongée, nous en concluons que AQ et BS ont un point commun au-dessus de QS. C. Q. F. D.

Remarque I. Les perpendiculaires AQ et BS ont évidemment au-dessous de QS un second point d'intersection, symétrique du premier par rapport à AB. Elles renferment donc un espace. Il en est de même pour deux droites quelconques du plan. On trouvera pour ce second cas, qui est le cas général, une démonstration très claire dans les *Premiers principes de métagéométrie* du professeur Mansion.

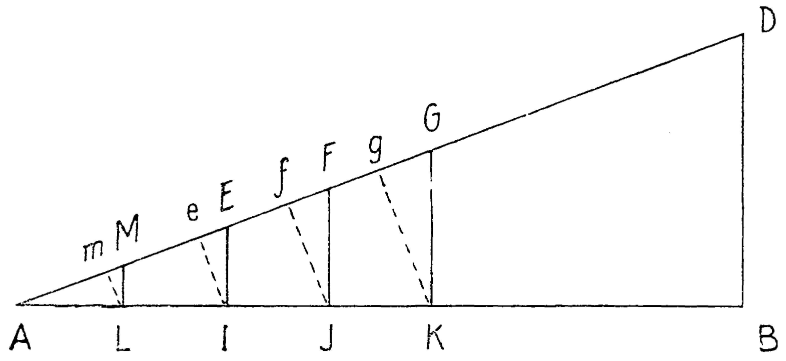


Fig. 2.

Remarque II. Si, dans le triangle rectangle ABD (fig. 2), nous supposons que les perpendiculaires ML, EI, FJ, GK..., ont été menées de telle sorte que leurs pieds déterminent sur AB des segments égaux, $AL = LI = IJ = JK = ,...$, il sera facile de prouver que l'on a :

$$\frac{AL}{AM} < \frac{AI}{AE} < \frac{AJ}{AF} < \frac{AK}{AG} < \cdots < \frac{AB}{AD}$$

Pour que tous les rapports qui précèdent $\frac{AB}{AD}$ deviennent égaux à ce dernier, il faudra les rendre plus grands en diminuant leurs dénominateurs respectifs des quantités Mm, Ee, Ff, Gg, ..., ou λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, ..., telles que l'on ait :

$$\frac{AL}{AM - \lambda_1} = \frac{AI}{AE - \lambda_2} = \frac{AJ}{AF - \lambda_3} = \frac{AK}{AG - \lambda_4} = \cdots = \frac{AB}{AD}.$$

Malgré cela, les triangles LAm, IAe, JAf, KAg, ... ne seront ni semblables entre eux, ni semblables à BAD ; car les figures semblables n'existent pas dans les géométries non-euclidiennes (il faut cependant faire exception pour les polygones réguliers et pour les figures égales évidemment).

Edmond Bordage.
(St-Denis; Ile de la Réunion.)