Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 6 (1904)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN SYMBOLE D'OPÉRATION DANS LE CALCUL DES DÉRIVÉES

Autor: Brand, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7574

UN SYMBOLE D'OPÉRATION

DANS LE CALCUL DES DÉRIVÉES

Soit u une fonction de la variable x.

On représente le rapport de la dérivée première de la fonction u à la fonction elle-même par $\underset{u}{\triangle}$, et le rapport de la dérivée k^e de u à la fonction par $\underset{u}{\triangle}^k$.

1° Si l'on a un produit uv de deux fonctions de x, on établit immédiatement la relation symbolique

$$\underset{u,v}{\triangle} = \underset{u}{\triangle} + \underset{v}{\triangle} \cdot \tag{1}$$

2° La formule se généralise aisément et on obtient

$$\underset{u_1 u_2 \dots u_n}{\triangle} = \sum_{i=1}^{i=n} \underset{u_i}{\triangle} \cdot \tag{2}$$

3° La formule de Leibniz, pour le développement de la dérivée d'un ordre quelconque d'un produit de deux fonctions u et v de x, conduit à

$$\underset{uv}{\triangle}^k = \left(\underset{u}{\triangle} + \underset{v}{\triangle}\right)^k, \tag{3}$$

k devant être considéré comme un véritable exposant dans le second membre.

4° On peut généraliser la relation (3) et écrire

$$\underset{u_1 u_2 \dots u_n}{\triangle}^k = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \underset{u_i}{\triangle}\right)^k = \Sigma \frac{P_k}{P_\alpha P_\beta \dots P_\nu} \underset{u_1}{\triangle}^\alpha \underset{u_2}{\triangle}^\beta \dots \underset{u_n}{\triangle}^\nu, \tag{4}$$

P_k, P_α, P_β, ... P_ν représentant les nombres de permutations simples de k, α, β. ... ν objets, et le signe Σ du 3^e^ membre s'étendant à toutes les valeurs de $\alpha, \beta, \dots \nu$ satisfaisant à la relation

$$\alpha + \beta + \dots + \nu = k .$$

Application à la dérivée d'un déterminant. — Soit A un déterminant dont les éléments soient fonctions de x.

On démontre facilement[1] que, si A est représenté par son terme principal $(a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n,n})$, la dérivée première de A s'obtient en considérant le terme principal comme un produit auquel on applique la règle de dérivation et en prenant les différents termes de la dérivée de $a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n,n}$ comme termes principaux d'une suite de déterminants.

On a alors

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d(a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n})}{dx} .$$

A cause des règles de dérivation d'une somme et d'un produit, on conclut la formule

$$\frac{d^k A}{dx^k} = \frac{d^k(a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n,n})}{dx^k} ,$$

qui peut s'écrire

$$\frac{d^k A}{dx^k} = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} \underset{a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}}{\triangle^k} ,$$

et, en vertu de la relation (4),

$$\frac{d^k A}{dx^k} = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} \sum \frac{P_k}{P_\alpha P_\beta \dots P_\nu} \underset{a_{1,1}}{\triangle^\alpha} \underset{a_{2,2}}{\triangle^\beta} \dots \underset{a_{n,n}}{\triangle^\nu} .$$

On substitue aux symboles $\underset{a_{1,1}}{\triangle^\alpha}, \underset{a_{2,2}}{\triangle^\beta}, \dots, \underset{a_{n,n}}{\triangle^\nu}$ leurs valeurs respectives, on remplace le signe Σ par le développement qu'il représente, on multiplie par le produit $a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n,n}$ et on simplifie. Le résultat donne une suite de termes qui

[1] Voir ma Note, *Journal de Mathém. spéc.* de Longchamps ; 1896, p. 102.

doivent être considérés comme les termes principaux des déterminants dont la somme est égale à la dérivée k^e du déterminant primitif A.

Exemple : Soit $A = (a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4})$.

On a

$$\frac{d^3 A}{dx^3} = a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4} \sum \frac{P_3}{P_\alpha P_\beta P_\gamma P_\delta} \underset{a_{1,1}}{\triangle^\alpha} \underset{a_{2,2}}{\triangle^\beta} \underset{a_{3,3}}{\triangle^\gamma} \underset{a_{4,4}}{\triangle^\delta} .$$

En faisant les opérations indiquées précédemment, on obtiendra, en n'écrivant que le 1[er] déterminant de chaque groupe et employant pour les dérivées des éléments la notation de Lagrange,

$$\frac{d^3 A}{dx^3} = \begin{vmatrix} a'''_{1,1} & a'''_{1,2} & a'''_{1,3} & a'''_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ 3.\begin{vmatrix} a''_{1,1} & a''_{1,2} & a''_{1,3} & a''_{1,4} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & a'_{2,3} & a'_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ 6.\begin{vmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & a'_{1,3} & a'_{1,4} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & a'_{2,3} & a'_{2,4} \\ a'_{3,1} & a'_{3,2} & a'_{3,3} & a'_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + \cdots$$

E. BRAND (Bruxelles).