

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN SYMBOLE D'OPÉRATION DANS LE CALCUL DES DÉRIVÉES
Autor: Brand, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7574>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

UN SYMBOLE D'OPÉRATION

DANS LE CALCUL DES DÉRIVÉES

Soit u une fonction de la variable x .

On représente le rapport de la dérivée première de la fonction u à la fonction elle-même par $\frac{\Delta}{u}$, et le rapport de la dérivée k^e de u à la fonction par $\frac{\Delta^k}{u}$.

1° Si l'on a un produit uv de deux fonctions de x , on établit immédiatement la relation symbolique

$$\frac{\Delta}{u, v} = \frac{\Delta}{u} + \frac{\Delta}{v}. \quad (1)$$

2° La formule se généralise aisément et on obtient

$$\frac{\Delta}{u_1 u_2 \dots u_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta}{u_i}. \quad (2)$$

3° La formule de Leibniz, pour le développement de la dérivée d'un ordre quelconque d'un produit de deux fonctions u et v de x , conduit à

$$\frac{\Delta^k}{uv} = \left(\frac{\Delta}{u} + \frac{\Delta}{v} \right)^k, \quad (3)$$

k devant être considéré comme un véritable exposant dans le second membre.

4° On peut généraliser la relation (3) et écrire

$$\frac{\Delta^k}{u_1 u_2 \dots u_n} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta}{u_i} \right)^k = \sum \frac{P_k}{P_\alpha P_\beta \dots P_\nu} \frac{\Delta^\alpha}{u_1} \frac{\Delta^\beta}{u_2} \dots \frac{\Delta^\nu}{u_n}, \quad (4)$$

$P_k, P_\alpha, P_\beta, \dots, P_\nu$ représentant les nombres de permutations simples de $k, \alpha, \beta, \dots, \nu$ objets, et le signe Σ du 3^e membre

s'étendant à toutes les valeurs de $\alpha, \beta, \dots, \nu$ satisfaisant à la relation

$$\alpha + \beta + \dots + \nu = k.$$

Application à la dérivée d'un déterminant. — Soit A un déterminant dont les éléments soient fonctions de x .

On démontre facilement¹ que, si A est représenté par son terme principal $(a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n})$, la dérivée première de A s'obtient en considérant le terme principal comme un produit auquel on applique la règle de dérivation et en prenant les différents termes de la dérivée de $a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$ comme termes principaux d'une suite de déterminants.

On a alors

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d(a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n})}{dx}.$$

A cause des règles de dérivation d'une somme et d'un produit, on conclut la formule

$$\frac{d^k A}{dx^k} = \frac{d^k(a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n})}{dx^k},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{d^k A}{dx^k} = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} \frac{\Delta^k}{a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}},$$

et, en vertu de la relation (4),

$$\frac{d^k A}{dx^k} = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} \sum \frac{P_k}{P_\alpha P_\beta \dots P_\nu} \frac{\Delta^\alpha}{a_{1,1}} \frac{\Delta^\beta}{a_{2,2}} \dots \frac{\Delta^\nu}{a_{n,n}}.$$

On substitue aux symboles $\frac{\Delta^\alpha}{a_{1,1}}, \frac{\Delta^\beta}{a_{2,2}}, \dots, \frac{\Delta^\nu}{a_{n,n}}$ leurs valeurs respectives, on remplace le signe Σ par le développement qu'il représente, on multiplie par le produit $a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$ et on simplifie. Le résultat donne une suite de termes qui

¹ Voir ma Note, *Journal de Mathém. spéc.* de Longchamps; 1896, p. 102.

doivent être considérés comme les termes principaux des déterminants dont la somme est égale à la dérivée k^e du déterminant primitif A.

Exemple : Soit $A = (a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{4,4})$.

On a

$$\frac{d^3 A}{dx^3} = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{4,4} \sum \frac{P_3}{P_\alpha P_\beta P_\gamma P_\delta} \Delta^\alpha \Delta^\beta \Delta^\gamma \Delta^\delta.$$

En faisant les opérations indiquées précédemment, on obtiendra, en n'écrivant que le 1^{er} déterminant de chaque groupe et employant pour les dérivées des éléments la notation de Lagrange,

$$\begin{aligned} \frac{d^3 A}{dx^3} = & \begin{vmatrix} a_{1,1}''' & a_{1,2}''' & a_{1,3}''' & a_{1,4}''' \\ a_{2,1}''' & a_{2,2}''' & a_{2,3}''' & a_{2,4}''' \\ a_{3,1}''' & a_{3,2}''' & a_{3,3}''' & a_{3,4}''' \\ a_{4,1}''' & a_{4,2}''' & a_{4,3}''' & a_{4,4}''' \end{vmatrix} + \dots \\ & + 3. \begin{vmatrix} a_{1,1}'' & a_{1,2}'' & a_{1,3}'' & a_{1,4}'' \\ a_{2,1}' & a_{2,2}' & a_{2,3}' & a_{2,4}' \\ a_{3,1}' & a_{3,2}' & a_{3,3}' & a_{3,4}' \\ a_{4,1}' & a_{4,2}' & a_{4,3}' & a_{4,4}' \end{vmatrix} + \dots \\ & + 6. \begin{vmatrix} a_{1,1}' & a_{1,2}' & a_{1,3}' & a_{1,4}' \\ a_{2,1}' & a_{2,2}' & a_{2,3}' & a_{2,4}' \\ a_{3,1}' & a_{3,2}' & a_{3,3}' & a_{3,4}' \\ a_{4,1}' & a_{4,2}' & a_{4,3}' & a_{4,4}' \end{vmatrix} + \dots \end{aligned}$$

E. BRAND (Bruxelles).