CORRESPONDANCE

CORRESPONDANCE

A propos d'une note récente sur la Géométrie générale.

Un correspondant de l'*Enseignement mathématique* a fait observer, en s'appuyant sur un exemple, que c'est à tort que certains géomètres pensent que la géométrie projective est indépendante de la théorie des parallèles et que ses théorèmes doivent subsister sans modification dans la géométrie non-euclidienne.

Il me semble que les géomètres ainsi visés pourraient peut-être opposer à l'objection élevée la réponse suivante :

La conception de l'infini géométrique comporte une grande part d'arbitraire. Rien n'empêche, par exemple, de concevoir l'espace comme constitué par des points, les uns situés à *distance* finie, les autres à distance infinie, ceux-ci étant définis comme étant inaccessibles au moyen de déplacements sans déformation.

Dès lors, deux lignes droites situées dans un même plan *se rencontrent toujours* à distance finie ou infinie ; une ligne droite peut être considérée comme une ligne fermée ; les plans, ainsi que les surfaces algébriques à branches infinies, doivent être considérées comme des surfaces fermées.

Cette conception (et n'est-ce pas la plus satisfaisante au point de vue de la généralité des propositions, tant en *Analysis situs* qu'en géométrie projective ?) revient à admettre que, si l'on considère un système de coordonnées projectives dans l'espace (et l'on sait que de tels systèmes peuvent être établis indépendamment de toute idée de distance), à tout groupe x, y, z de trois valeurs réelles de ces coordonnées, y compris $\pm\infty$, correspond un point de l'espace, et réciproquement.

Les systèmes de coordonnées vulgaires, basées sur la distance euclidienne, sont des cas particuliers des systèmes projectifs et jouissent par conséquent des mêmes propriétés.

Mais il n'en est pas de même des systèmes qui seraient basés sur la notion de distance lobatchewskienne. Celle-ci est effectivement une fonction logarithmique des coordonnées projectives et peut, pour des valeurs réelles de ces coordonnées, prendre des valeurs imaginaires, de sorte que, avec un système de coordonnées lobatchewskiennes, la solution commune aux équations de deux lignes droites situées dans un même plan, mais ne se rencontrant pas (au sens lobatchewskien), est représentée par des valeurs imaginaires (représentant des points de l'infini lobatchewskien), fait analytique qui n'est en rien contradictoire avec la conception de l'espace exposée plus haut.

Ce fait est corrélatif de la propriété de log x de prendre une série de valeurs imaginaires, pour passer de $+\infty$ à $-\infty$, x variant d'une manière continue de $-\infty$ à 0.

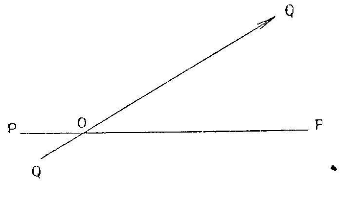
En résumé, les hypothèses métriques n'interviennent dans la conception même de l'espace ponctuel, considéré comme une variété numérique, que parce qu'il s'établit une confusion entre les propriétés de l'espace et celles de certaines coordonnées — du moins c'est ainsi que nous nous représentons l'état de cette question. G. COMBEBIAC.

Lettre à M. Laisant, à propos de son article sur les bissectrices d'un angle.

Université d'Edinburgh, le 12 novembre 1902.

Cher Monsieur,

J'ai pris beaucoup d'intérêt à la lecture de vos *Remarques sur les bissectrices d'un angle* publiées dans le numéro de juillet 1902, de l'*Enseignement mathématique*. Le sujet se rattache aux travaux qui paraissent de temps en temps sur l'introduction des quantités négatives en géométrie, question appelée à jouer un rôle de plus en plus important dans l'enseignement des mathématiques élémentaires. Une attention soutenue portée sur les grandeurs géométriques négatives éviterait souvent, je crois, beaucoup de difficultés qui se présentent dans la pratique. Plusieurs soi-disant démonstrations de la géométrie analytique élémentaire ne sont pas du tout des démonstrations mais bien d'heureuses coïncidences avec les formules algébriques qui s'appliquent nécessairement à tous les cas. Comme exemple, je citerai seulement quelques-unes des démonstrations qu'on donne pour l'expression de l'aire du triangle en fonction des coordonnées de ses sommets. Dans la plus élémentaire, fondée sur la distance entre deux points (x) et (x') prise sous la forme $\sqrt{\Sigma(x-x')^2}$, on introduit la possibilité d'un signe moins qui dans certaines circonstances paraît laisser un doute.

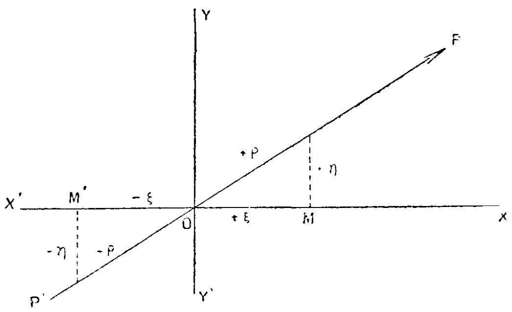


En premier lieu qu'entend-on par l'angle de deux droites? Avant de pouvoir considérer l'angle nous devons préalablement diriger les droites et en choisir une comme base.

Ainsi l'inclinaison de $\overline{OQ}$ sur $\overline{OP}$ où l'angle $\widehat{POQ}$ est la rotation nécessaire peut amener $\overline{P'OP}$ sur la direction $\overline{Q'OQ}$.

Les cosinus directeurs d'une droite fournissent un moyen parfait d'interpréter la direction de cette droite. Pour abréger je me borne au cas de droites situées dans un plan passant par l'origine.

Si $\overline{OP}$ est le sens positif de la droite, c'est-à-dire qu'une mesure faite sur cette droite soit prise avec le signe $+$ dans la direction OP et avec le signe $-$ dans la direction OP$'$.



Alors les cosinus directeurs de la droite sont

$$\alpha = \frac{\xi}{\rho}, \ \beta = \frac{\eta}{\rho}$$

où (ξ, η) est un point quelconque R pris sur la droite et ρ la longueur dirigée OR.

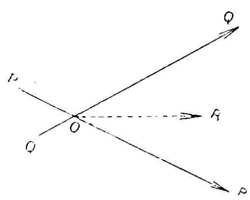
Ainsi

$$\frac{-\xi}{-\rho} = \frac{+\xi}{+\rho}.$$

Pour la droite POP$'$, ces cosinus directeurs sont changés de signe. On a de semblables résultats dans l'espace à trois dimensions.

A ce point de vue rien ne pourrait être plus élégant que votre recherche des cosinus directeurs des bissectrices des angles de deux droites, mais je crois que vous y êtes forcément amené en discutant la question de savoir si c'est l'angle aigu ou l'angle obtus que nous bissectons.

Les droites étant dirigées par les cosinus directeurs, nous n'avons par la liberté de choisir l'angle compris entre ces droites.



Il est déjà donné par les lignes dirigées de O vers P $(\alpha\beta\gamma)$ et Q $(\alpha', \beta', \gamma')$.

Il y a plus : si le dénominateur dans les rapports $(\alpha + \alpha') : (\beta + \beta') : (\gamma + \gamma')$ est pris positivement, la bissectrice est, elle aussi, dirigée et sa direction est celle que nous prendrions naturellement pour direction positive de cette bissectrice. Les trois autres bissectrices correspondent à $-(\alpha + \alpha') : -(\beta + \beta') : -(\gamma + \gamma')$; $(-\alpha + \alpha') : (-\beta + \beta') : (-\gamma + \gamma')$; $(\alpha - \alpha') : (\beta - \beta') : (\gamma - \gamma')$, le dénominateur pour les cosinus directeurs étant pris positivement.

Ainsi $(-\alpha + \alpha') : (-\beta + \beta') : (-\gamma + \gamma')$ correspond à la bissectrice entre OP$'$ et OQ. Si la direction de la bissectrice OR n'est pas essentielle, le même problème se résout aisément comme il suit. Soient (ξ, η, ζ) les cosinus directeurs; puisque $\cos \widehat{POR} = \cos \widehat{ROQ}$ on a

$$\xi\alpha + \eta\beta + \xi\gamma = \Sigma\xi\alpha'$$

c'est-à-dire

$$\Sigma\xi(\alpha - \alpha') = 0. \qquad (1)$$

En outre les trois directions sont coplanaires

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) fournissent les rapports pour ξ, η, ζ,

$$\alpha + \alpha' : \beta + \beta' : \gamma + \gamma',$$

mais les équations (1) et (2) sont également vérifiées par la droite ayant pour direction $\overline{\mathrm{RO}}$; de là l'incertitude en direction.

Pour la bissectrice de l'angle supplémentaire, nous changerions les signes de α', β', γ', pour obtenir l'angle P'OQ.

Les cosinus directeurs sont donnés par

$$(\alpha - \alpha') : (\beta - \beta') : (\gamma - \gamma').$$

Le problème le plus général de déterminer les cosinus directeurs de $\overline{\mathrm{OR}}$ lorsque $\widehat{\mathrm{POR}} = \frac{1}{n} \widehat{\mathrm{POQ}}$ peut être résolu comme suit. C'est une question de trigonométrie et de théorie des équations de déterminer $n = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$ de sorte que

$$x = \cos\left[\frac{1}{n} \operatorname{arc} \cos\,(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')\right].$$

De là

$$x^2\Sigma\xi^2 = (\Sigma\alpha\xi)^2. \tag{1}$$

L'équation (2) est la même que plus haut. Ces deux équations correspondent à deux droites et la droite demandée doit être telle que

$$\cos \widehat{\mathrm{ROQ}} = \left\{ \cos\,(n - 1)\,\widehat{\mathrm{POR}} \right\}.$$

Dans tout problème sur la ligne droite dans un plan renfermant des mesures d'angles, l'équation d'une droite sous la forme $y = mx + c$ est d'un faible usage parcequ'une telle droite ne peut pas être une droite dirigée et l'équation représente également une certaine droite dans une direction donnée ou la même droite dans la direction opposée. C'est dû à ce fait que tang $(\pi + \theta) =$ tang θ.

Lorsque par conséquent nous cherchons à mesurer l'angle entre deux droites $y = mx + c$ et $y = m'x + c'$ et que nous obtenons

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

l'ambiguïté est due à ce fait que les droites ne sont pas dirigées. Heureusement dans les cas importants du parallélisme et de la perpendicularité cette difficulté ne s'élève pas. Quand l'équation de la perpendiculaire à une droite dans un plan ou à un plan dans l'espace se présente, c'est, je crois, une erreur d'imaginer que la perpendiculaire issue de l'origine doive toujours être prise comme positive, car cela enlève aux considérations développées ci-dessus les avantages qu'elles présentent au point de vue des expressions algébriques.

L'équation de géométrie plane

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0,$$

signifie : la ligne telle qu'en considérant la perpendiculaire qu'on lui abaisse de l'origine, celle-ci est inclinée de l'angle θ sur l'axe des x, tandis que la distance de l'origine au pied de cette perpendiculaire est p en grandeur et en signe. Avec cette interprétation il n'y a plus de confusion possible entre les deux droites

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0,$$
$$x \cos \theta + y \sin \theta + p = 0,$$

car l'essentiel est le sens ou la direction de la perpendiculaire.

Remarquons aussi que

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$$
$$x \cos (\theta + \pi) + y \sin (\theta + \pi) + p = 0$$

représentent concuremment la même droite. Les deux perpendiculaires ont des sens opposés sur la même droite de base. La droite elle-même dans ce cas est non dirigée mais ceci est dû à cette particularité qu'elle est perpendiculaire à la droite menée par l'origine. Si au lieu d'être perpendiculaire à la droite menée par l'origine, la droite est inclinée de l'angle θ, cette dernière est encore dirigée et son équation est

$$x \sin (\theta + \varphi) - y \cos (\theta + \varphi) - p \sin (- \varphi) = 0.$$

Cette équation est toujours distincte de

$$x \sin (\theta - \varphi) - y \cos (\theta - \varphi) - p \sin (- \varphi) = 0$$

sauf lorsque $2\varphi = \pi$.

De semblables considérations s'appliquent dans l'espace à l'équation

$$x \cos \theta + y \cos \varphi + z \cos \psi - p = 0.$$

Charles TWEEDIE (Edinburgh).

Réponse à M. Cailler au sujet du calcul des probabilités.

Nous remercions vivement M. Cailler, de l'attention qu'il a bien voulu donner à l'article très audacieux qu'a publié de nous cette revue exclusivement mathématique, alors que nous ne sommes pas des mathématiciens. Mais, nous l'avons montré, cette partie des mathématiques, le calcul des probabilités, a pris une très grande valeur dans tous les ordres de sciences. Or nous craignons que parfois, en restant trop près des formules, on ne s'élève pas assez au-dessus d'elles pour en bien pénétrer le sens plus lointain, à l'aide du bon sens et de la raison. Nous nous excusons des erreurs que nous avons pu faire. Cependant il semble que les objections de M. Cailler ne portent pas entièrement.

1° M. Cailler montre, contre nous, dit-il, que les deux formules

$$(1) \qquad P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{h^2}{2mpq}} \quad \text{et} \quad (2) \quad P_2 = \Theta\left(\frac{h}{\sqrt{2mpq}}\right)$$

n'ont pas besoin d'être équivalentes, puisqu'elles signifient deux choses très différentes, la première, la probabilité d'un écart égal à h, la deuxième, la probabilité d'un écart moindre.

Mais nous n'avons jamais prétendu que ces deux formules dussent être identiques.

C'est à l'équivalence de la formule (3)

$$(3) \qquad 1 - \Theta\left(\frac{h}{\sqrt{2mpq}}\right).$$

et de la formule (1) que nous nous sommes attaqués, cette formule (3) étant inverse de la formule (2) et mesurant la probabilité d'un écart égal ou supérieur à h.

Et nous n'inventons pas cet usage de la formule $1 - \Theta(t)$ puisque M. Bertrand l'emploie couramment.

A vrai dire la formule (3) ne doit pas être identique à la formule (1) puisque la première mesure seulement la probabilité d'un écart égal, la seconde la probabilité d'un écart égal ou supérieur à h. Et là a été notre négligence. Nous avons considéré la première formule comme mesurant la probabilité d'un écart au moins égal à h, et non tout à fait égal à h.

Il reste cependant que la formule (1) qu'on a employée dans les applications, n'a guère d'intérêt et que, seules, les formules (2) et (3) sont fécondes. Nos conclusions sont maintenues, mais nous avions fait une remarque erronée, nous le reconnaissons franchement.

2° Pour ce qui est de la probabilité du joueur, nous maintenons entièrement nos conclusions, non que le joueur ait raison, car, et c'est là l'objection la plus forte à son calcul, on ne peut parler de probabilité pour un cas.

M. Cailler reproduit tout simplement l'argumentation de M. Poincaré sur les séries également probables de six rouges et une noire d'une part, et de sept rouges d'autre part.

Raisonnons un peu. Nous supposons une succession illimitée de rouges et de noires. Nous voulons dans cette succession déterminer une série. Il y a deux procédés : ou je vais prendre sept coups consécutifs, les considérer comme une série et en chercher la probabilité, et alors nos adversaires ont raison. Ou je vais, au lieu de ce procédé arbitraire, chercher une série dans cette succession. Qu'est-ce qu'une *série* pour la raison? C'est une consécution d'éléments homogènes. Qu'y a-t-il d'homogène dans cette succession? ou des éléments rouges ou des éléments noirs. Alors, je m'en vais prendre une consécution de rouges, par exemple une série de 7 rouges. Comment ma série est-elle définie, à l'origine? par l'apparition d'une rouge *après une noire;* à la fin? par l'*apparition d'une noire* après une rouge. Ma série ne peut comprendre que des rouges, la noire précède l'ouverture de la série et la clôture. Dire donc série de six rouges et une noire, c'est dire série de six rouges et série de noires commençante (pouvant ne comprendre qu'un terme, ou plus).

Si l'on ne procède pas ainsi, il n'y a qu'arbitraire et irrationnel. Par quoi est précédée la série donnée par M. Cailler : Rouge, *noire*, *noire*, *noire*, rouge, *noire*, rouge? Par quoi est-elle continuée? Pourquoi considérer cette série? Il n'y a pas de raison, il n'y a pas de série unique. Il y a là une série d'une rouge, une série de trois noires, une série d'une rouge, une d'une noire, une d'une rouge (bien qu'en général on conserve le mot série pour une consécution multiple).

Il nous semble qu'il y a là un exemple de préoccupation tout à fait exclusive pour les formules empêchant la réflexion d'examiner la matière même de ces formules, ici la notion de *série*.

N. Vaschide et H. Piéron.