

# II Les Géométries et leurs relations.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Telle est la proposition démontrée par Sophus Lie en se basant sur les propriétés, découvertes par lui-même, des groupes de transformations.

Il résulte de là que, si l'on appelle « point » l'ensemble de trois coordonnées, et « déplacements sans déformation », les transformations de l'un des groupes ainsi définis, on pourra établir, par rapport à ce groupe, des définitions et des propriétés correspondantes à celles de la Géométrie où n'intervient pas le postulat des parallèles.

Quant à ce postulat, il devra être remplacé par d'autres propositions convenablement choisies suivant le groupe pris pour base.

Enfin nous citerons les ouvrages de M. Klein <sup>(1)</sup> (1889-90) sur la Géométrie non-euclidienne, où l'on trouvera, en plus d'un bel exposé des travaux indiqués ci-dessus (sauf ceux de Lie), des résultats personnels du plus haut intérêt, notamment sur les diverses formes d'espace susceptibles de correspondre à une même détermination métrique.

Des travaux illustres que nous venons d'énumérer résulte sans conteste la possibilité d'établir, en écartant le postulat des parallèles, des Géométries conséquentes avec elles-mêmes et, par suite, l'impossibilité de démontrer ce postulat en s'appuyant sur les autres axiomes.

D'ailleurs, un simple regard jeté sur une surface sphérique montre qu'on y peut réaliser une Géométrie satisfaisant, à l'intérieur d'un domaine convenablement limité, aux axiomes d'Euclide, à l'exception du postulat des parallèles.

## II

### Les Géométries et leurs relations.

DIFFÉRENTES GÉOMÉTRIES. — Nous allons étudier d'un peu plus près les différentes Géométries et les relations que l'on peut établir entre elles.

---

(1) KLEIN. *Nicht-Euclidische Geometrie Vorlesungen*, ausgearbertet von Fr. Schilling, Göttingen, 1893.

Y aurait-il autant de Géométries qu'il y a de groupes de transformations du type indiqué par Sophus Lie ?

Nullement, pourvu que l'on n'envisage que l'enchaînement logique des propositions, en faisant abstraction de la diversité des figures susceptibles de leur correspondre.

La Géométrie correspondante à un groupe ne dépend que des propriétés que présentent, par rapport à ce groupe, les notions fondamentales relatives à ce groupe : lignes jouant le rôle des lignes droites, fonction jouant le rôle de la distance, etc., de sorte qu'une seule Géométrie correspond à tous les groupes susceptibles de se transformer l'un dans l'autre par un changement quelconque, toutefois réel, de variables.

On peut donc se borner à considérer les groupes dans lesquels les lignes jouant le rôle des lignes droites sont effectivement les lignes droites de la Géométrie vulgaire, c'est-à-dire les groupes projectifs conservant les quadriques de cette dernière Géométrie, et, parmi ceux-ci, ne distinguer que trois cas (certains cas étant éliminés par les conditions auxquelles doit satisfaire la mesure des angles), donnant lieu à trois Géométries, savoir :

Quadrique réelle (domaine intérieur), Géométrie pseudo-sphérique ;

Quadrique imaginaire à équation réelle, Géométrie sphérique ;

Quadrique dégénérée en une conique imaginaire, Géométrie euclidienne ;

On est toutefois conduit, comme on le verra plus loin, à introduire dans les Géométries non-euclidiennes un paramètre, qui semblerait indiquer que ces Géométries forment une série simplement infinie.

Nous verrons qu'en fait ce paramètre est arbitraire, quand on ne considère que la Géométrie où il figure et qu'il ne caractérise une propriété de celle-ci que lorsqu'on la compare à une autre présentant avec la première certaines relations.

DISTANCE GÉNÉRALISÉE SUIVANT CAYLEY. — Nous pouvons évidemment nous servir de la Géométrie vulgaire comme système d'analyse pour étudier, au point de vue qui nous occupe, un groupe conservant une quadrique. Soit l'équation de la quadrique

$$\Omega_{xx} = 0,$$

le premier membre représentant une fonction du second degré des coordonnées  $x, y, z$ .

Le groupe admet un invariant simultané relatif à deux points quelconques  $x, y, z; x', y', z'$ , savoir le rapport anharmonique formé par ce couple de points avec les points d'intersection de la quadrique et de la droite qui les joint.

En posant

$$\Omega_{xx'} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial x} x' + \frac{\partial \Omega}{\partial y} y' + \frac{\partial \Omega}{\partial z} z' \right]$$

ce rapport anharmonique a pour expression

$$F(x, x') = \frac{\Omega_{xx'} + \sqrt{\Omega_{xx'}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{x'x'}}}{\Omega_{xx'} - \sqrt{\Omega_{xx'}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{x'x'}}},$$

et l'on peut choisir pour l'invariant une fonction quelconque de cette quantité.

Pour trois points,  $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$ , en ligne droite et se succédant dans l'ordre où ils sont écrits, l'on a

$$F(x, x'') = F(x, x') \times F(x', x''),$$

formule que l'on vérifiera en remplaçant dans le second membre les coordonnées du second point par les expressions

$$x' = tx + \theta x''$$

$$y' = ty + \theta y''$$

$$z' = tz + \theta z'',$$

où  $t$  et  $\theta$  sont des nombres compris entre zéro et l'unité et ayant leur somme égale à l'unité.

Si l'on veut que la distance soit une fonction satisfaisant, dans les conditions ci-dessus, à la relation

$$f(x, x'') = f(x, x') + f(x', x''),$$

son expression générale devra être évidemment

$$(1) \quad f(x, x') = c \log \frac{\Omega_{xx'} + \sqrt{\Omega_{xx'}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{x'x'}}}{\Omega_{xx'} - \sqrt{\Omega_{xx'}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{x'x'}}},$$

ou encore

$$(2) \quad f(x, x') = 2ic \operatorname{arc} \cos \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{x|x|}}} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\sqrt{\Omega_{xx}^2 + \Omega_{xx} \Omega_{xx}}}{\Omega_{xx'}}$$

où  $c$  est une constante arbitraire.

L'expression (1) conviendra au cas de la quadrique réelle, et l'on devra alors choisir pour  $c$  une valeur réelle et positive; l'expression (2) conviendra au cas de la quadrique imaginaire, et l'on devra alors donner à  $c$  une valeur imaginaire pure

$$c = c'i.$$

On voit qu'en Géométrie sphérique (ou riemannienne) la mesure des distances sur une ligne droite présente les mêmes caractères que la mesure des angles autour d'un point dans la Géométrie plane ordinaire.

PARAMÈTRE DES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES. — Le paramètre  $c$  (paramètre  $k$  de Gauss et de Lobatchewski) représente une longueur déterminée, savoir la distance de deux points dont le rapport anharmonique relativement à la quadrique fondamentale est égale à  $e$ .

Donner une valeur déterminée à  $c$  revient à fixer l'unité de longueur.

L'introduction du paramètre  $c$  présente l'avantage de rendre arbitraire l'unité de longueur et par suite homogènes les formules des Géométries non-euclidiennes; mais la propriété consistant dans l'homogénéité des formules n'aura pas le même caractère que dans la Géométrie euclidienne. Dans cette dernière, la multiplication par un même nombre de toutes les longueurs figurant dans une formule peut être interprétée soit comme un changement d'unité, soit comme une modification par similitude des figures; dans les Géométries non-euclidiennes, cette dernière interprétation n'est pas possible, car la longueur représentée par le paramètre  $c$  est liée à la Géométrie même et ne peut être modifiée par une transformation ponctuelle.

DÉTERMINATIONS MÉTRIQUES PRÉSENTANT UN CONTACT EN UN POINT. — Nous avons vu qu'il n'existait, à proprement parler, que trois Géométries différentes, en désignant par le mot Géométrie un

ensemble de propositions, susceptibles d'ailleurs de correspondre à des images géométriques diverses. Dans cet ordre d'idées, on ne distingue pas, par exemple, la Géométrie riemannienne sur le plan de la Géométrie sur la sphère, quoique les propositions de l'une et de l'autre ne deviennent identiques qu'en remplaçant dans cette dernière les mots grand cercle par ligne droite.

Une même Géométrie peut être obtenue en choisissant des opérations différentes pour définir l'égalité, c'est-à-dire la superposabilité ; l'égalité aura les mêmes propriétés, mais les figures égales ne seront pas les mêmes dans les deux cas.

Mais rien n'empêche d'envisager à la fois dans l'espace, conçu simplement comme l'ensemble des points, les différents groupes de transformations susceptibles, suivant le théorème de Lie, de donner lieu à des systèmes de détermination métrique.

Les groupes dans lesquels les lignes jouant le rôle des droites sont les mêmes, donneront lieu aux mêmes propriétés projectives des figures. Ces groupes sont compris dans un même groupe, savoir le groupe projectif général.

Il peut exister entre deux de ces groupes une relation consistant en ce que les déterminations métriques correspondantes donnent lieu, en un point déterminé de l'espace, aux mêmes propriétés, aux infiniment petits près d'ordre supérieur.

M. Kleïn <sup>(1)</sup> exprime cette relation en disant que les deux déterminations métriques (*Maassbestimmungen*) présentent un contact en un point.

Considérons une détermination euclidienne et une détermination non-euclidienne présentant un contact en un point O.

En ce point, le cône isotrope euclidien doit se confondre avec le cône tangent à la quadrique fondamentale non-euclidienne, c'est-à-dire que le plan de l'infini et le cercle imaginaire de l'infini euclidiens se confondent respectivement avec le plan polaire du point O par rapport à cette quadrique fondamentale et avec l'intersection de ce plan et de cette quadrique.

Autrement dit, la quadrique fondamentale du système non-euclidien considéré est, dans le système euclidien considéré, une

---

(1) KLEIN. *Math. Annalen*, Bd. IV, S. 573 ; traduit en français par Laugel, Paris.

sphère ayant pour centre le point O, et par suite de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4c^2 = 0,$$

$c$  étant réel ou purement imaginaire et de la forme  $i c'$ .

On est conduit, d'après les idées de Riemann et de Beltrami, à donner le nom de courbure à l'expression

$$\frac{1}{4c^2},$$

la courbure étant positive pour une géométrie sphérique (quadrique fondamentale imaginaire) et négative pour une géométrie pseudo-sphérique (quadrique fondamentale réelle).

Il reste bien entendu qu'il ne faut associer à ce mot de courbure aucune des images géométriques qu'il éveille dans la théorie ordinaire des surfaces et des courbes.

Formons, d'après la formule (1) ou (1bis), l'expression de l'élément linéaire  $ds$  relatif à la détermination non-euclidienne correspondante à la quadrique ci-dessus.

Cette expression contient un paramètre arbitraire  $c$ , mais la condition de retrouver, pour  $x = y = z = 0$ , l'expression euclidienne de l'élément linéaire, conduit à l'égalité des deux paramètres que nous avons désignés par la même lettre  $c$  en prévision de ce résultat, et l'on a finalement :

$$ds^2 = 4c^2 \frac{4c^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (\gamma dx - x d\gamma)^2 - (z dy - y dz)^2 - (x dz - z dx)^2}{(4c^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2}.$$

On voit que cette expression se confond avec l'expression habituelle de l'élément linéaire, non-seulement pour  $x = y = z = 0$ , mais encore,  $x$ ,  $y$  et  $z$  étant quelconques, pour  $c^2 = \infty$ .

Par la condition que les deux géométries considérées donnent lieu à la même détermination métrique au point O, la longueur non euclidienne  $c$  a pris une signification par rapport à la géométrie euclidienne, et devient caractéristique de la géométrie non-euclidienne considérée parmi celles qui ont un contact en O avec cette géométrie euclidienne.

On remarque que, tandis qu'il existe une série simplement infinie de géométries non-euclidiennes ayant un contact en un point donné avec une géométrie euclidienne, il n'existe qu'une

géométrie euclidienne jouissant de cette propriété par rapport à une géométrie non-euclidienne donnée.

Pour comparer les déterminations métriques sur une ligne droite, faisons dans la formule donnant l'expression de l'élément linéaire :

$$y = z = 0.$$

On a alors,  $x$  désignant la distance au point O suivant la détermination euclidienne et  $s$  la même distance suivant la détermination non-euclidienne :

$$ds = \frac{4c^2 dx}{4c^2 - x^2}.$$

En géométrie pseudo-sphérique (lobatchewskienne) :

$$s = 2c \log \frac{(2c + x)^2}{(2c - x)^2}.$$

En géométrie sphérique (riemannienne), l'on a pour  $c' = i c''$ ,

$$ds = \frac{4c'^2 dx}{4c'^2 + x^2}, s = 2c' \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{2c'}.$$

Nous venons de voir comment se présentent les déterminations métriques non euclidiennes, dans l'analyse euclidienne.

Pour varier les points de vue, supposons, au contraire, que, tout en employant des instruments de mesure non-euclidiens, l'on continue à tenir pour exactes les formules et les raisonnements euclidiens.

Dans ces conditions, l'on remplace en chaque point de l'espace la détermination métrique non-euclidienne par la détermination euclidienne présentant avec la première un contact en ce point, de même que l'on emploie souvent, à la place d'une petite portion sphérique une représentation plane obtenue en projetant cette portion superficielle sur son plan tangent.

Toute détermination métrique directe (d'angle ou de distance) se confondra ainsi en chaque point avec la vraie, et la longueur d'une ligne obtenue par la mensuration successive de ses segments élémentaires sera concordante avec la longueur qui résulterait de la détermination non-euclidienne considérée.



Mais la détermination euclidienne employée différera d'un point à un autre, de sorte que les résultats ainsi obtenus par des mesures directes ne seront pas concordants avec les résultats *calculés* au moyen des formules euclidiennes. C'est ainsi que l'on constatera, par exemple, que la somme des angles d'un triangle est différente de deux angles droits.

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE SUR LA SPHÈRE. — Pour associer quelques images géométriques aux considérations analytiques exposées dans ce paragraphe, appliquons celles-ci à la Géométrie sur une sphère, c'est-à-dire à l'ensemble des propriétés invariantes dans les déplacements sans déformation conservant cette surface, déplacements qui sont les rotations autour du centre.

Parmi les notions primordiales, l'on trouve le point et le grand cercle.

On peut toujours, par un déplacement, amener un point en un autre point quelconque de la sphère.

Un point de la surface étant fixe, on peut encore opérer un déplacement de manière à amener un autre point quelconque sur un grand cercle passant par le point fixe.

Par un point on peut mener un grand cercle, et généralement un seul, perpendiculaire à un grand cercle donné.

On déduit de ces propriétés tout un ensemble de propositions, qui deviendraient identiques aux propositions de la géométrie plane indépendantes du postulat des parallèles, moyennant le remplacement des mots *grand cercle* par *ligne droite*.

Il y a lieu d'observer toutefois qu'on doit, pour cette équivalence, se limiter sur la sphère, à un certain domaine, en raison du fait suivant :

Tous les grands cercles passant par un point passent par son opposé et sont perpendiculaires au grand cercle dont ces points sont les pôles.

Nous reviendrons plus loin sur cette particularité.

Pour comparer deux déterminations métriques au moyen d'images sphériques, comme nous l'avons fait au moyen d'images planes, prenons sur la sphère, pour système de référence, deux grands cercles rectangulaires se coupant en un point O, pris pour origine.

Les coordonnées d'un point M seront les longueurs X et Y des arcs de ces grands cercles compris entre le point O et les grands cercles menés par M perpendiculairement aux premiers.

Les trois coordonnées du point M par rapport à un système trirectangle ayant pour origine le centre de la sphère, un des axes passant par le point O, ont pour expression :

$$R \frac{\cos \frac{X}{R} \sin \frac{Y}{R}}{\sqrt{\cos^2 \frac{X}{R} + \cos^2 \frac{Y}{R} - \cos^2 \frac{X}{R} \cos^2 \frac{Y}{R}}},$$

$$R \frac{\cos \frac{X}{R} \cos \frac{Y}{R}}{\sqrt{\cos^2 \frac{X}{R} + \cos^2 \frac{Y}{R} - \cos^2 \frac{X}{R} \cos^2 \frac{Y}{R}}},$$

$$R \frac{\cos \frac{Y}{R} \sin \frac{X}{R}}{\sqrt{\cos^2 \frac{X}{R} + \cos^2 \frac{Y}{R} - \cos^2 \frac{X}{R} \cos^2 \frac{Y}{R}}}.$$

On vérifiera que tout déplacement sans déformation de la sphère, savoir une rotation autour de son centre, laisse invariante l'équation

$$\cos^2 \frac{X}{R} + \cos^2 \frac{Y}{R} - \cos^2 \frac{X}{R} \cos^2 \frac{Y}{R} = 0.$$

ou

$$\operatorname{tg}^2 \frac{X}{R} + \operatorname{tg}^2 \frac{Y}{R} + 1 = 0.$$

Posons

$$x = R \operatorname{tg} \frac{X}{R}, \quad y = R \operatorname{tg} \frac{Y}{R}.$$

Tout déplacement sans déformation de la sphère sera représenté par une transformation projective en  $x$  et  $y$  conservant l'équation quadratique :

$$x^2 + y^2 + R^2 = 0.$$

Un grand cercle de la sphère a une équation de la forme

$$a \cos \frac{X}{R} \sin \frac{Y}{R} + b \cos \frac{X}{R} \cos \frac{Y}{R} + c \cos \frac{X}{R} \cos \frac{Y}{R} = 0.$$

ou

$$ax + by + c = 0.$$

La position d'un point sur la sphère est une fonction périodi-

que des coordonnées  $X$  et  $Y$ , de sorte que les systèmes de valeurs  $X, Y$  et  $X + 2\pi R, Y + 2\pi R$ , représentent le même point.

Les coordonnées  $x$  et  $y$  sont également des fonctions périodiques de  $X$  et  $Y$ , mais de période  $\pi R$ , de sorte qu'aux deux points  $X, Y$  et  $X + \pi R, Y + \pi R$  correspond le même système de valeurs  $x, y$ .

En laissant de côté un des deux points correspondants à  $x$  et  $y$ , on ne considère, en faisant varier  $x$  et  $y$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ , que la demi-sphère limitée par un grand cercle ayant pour pôle le point  $O$ . Le groupe euclidien ayant un contact en  $O$  avec le groupe des déplacements sphériques est représenté par le groupe projectif continu en  $x, y$ , conservant l'équation

$$x^2 + y^2 = 0.$$

La courbe de l'infini relatif à ce système euclidien est le grand cercle ayant pour pôle le point  $O$ .

Par un de ces déplacements euclidiens, un point quelconque de la demi-sphère ne pourra jamais atteindre ce grand cercle.

Les rotations euclidiennes autour du point  $O$  se confondent avec les rotations sphériques.

Une translation euclidienne sera une transformation dans laquelle tous les points décrivent des grands cercles perpendiculaires à un même grand cercle passant par le point  $O$ . On voit que ces grands cercles rencontrent le grand cercle de l'infini au même point. Ils jouent le rôle des parallèles de la géométrie plane ordinaire.

Ainsi se trouvent réalisées, sur la sphère, deux géométries : l'une non-euclidienne, qui est relative aux déplacements vulgaires de la sphère ; l'autre euclidienne, qui comprend un ensemble de propriétés susceptibles d'être exprimées par les mêmes propositions que les propriétés de la géométrie plane ordinaire.

### III

#### L'Infini géométrique.

DIVERSES CONCEPTIONS DE LA LIGNE DROITE ET DU PLAN. — Nous nous sommes efforcés, dans les pages précédentes, en variant les figures que l'on peut faire correspondre à une même relation