Sur la formule du binôme.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

CORRESPONDANCE

Sur la formule du binôme.

Généralement (surtout parmi les élèves) on s'imagine qu'il est impossible d'établir la formule du binôme sans connaître la théorie des combinaisons. Or, ce sont là deux choses tout à fait indépendantes l'une de l'autre. En effet, laissant de côté certaine démonstration de la formule de Newton, fondée sur la méthode d'induction, et par conséquent peu propre à figurer dans un cours — je prétends qu'on peut réussir, avec des débutants, en procédant comme il suit.

Appelons, comme tout le monde, dérivée d'un polynôme entier $f(x)$, la limite vers laquelle tend.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

quand h tend vers zéro, et cherchons, en particulier, la dérivée de αx^m, α désignant une constante, et m un entier positif. De l'identité

$$\alpha(x+h)^m - \alpha x^m = \alpha h\left[(x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2}x + \ldots + x^{m-1}\right]$$

on déduit

$$\frac{\alpha(x+h)^m - \alpha x^m}{h} = \alpha \sum_{p=0}^{p=m-1} (x+h)^{m-1-p}\, x^p.$$

Or, quand h tend vers zéro, chaque terme écrit sous le signe Σ a la même limite, x^{m-1}; et comme ces termes sont au nombre de m, leur somme a pour limite mx^{m-1}. Donc la dérivée cherchée est $m\alpha x^{m-1}$.

Ensuite, la dérivée du polynôme $f(x)$ étant la somme des dérivées de ses termes, on en déduira,

$$f'(x) = ma_0x^{m-1} + (m-1)\, a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}$$

et pour les expressions des dérivées suivantes :

$$f''(x) = m(m-1)a_0x^{m-2} + \ldots + 2a_{m-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^m(x) = m(m-1)\ldots 2.1.\, a_0\,;$$

Puis :

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1} f'(o) + \frac{x^2}{1.2} f''(o) + \ldots + \frac{x^m}{m!} f^m(o).$$

En particulier, si $f(x)$ est le développement de $(a+x)^m$, ce qui précède montre que l'on a, en changeant x en $a+x$:

$$f'(x) = m(a+x)^{m-1}, \qquad f'(o) = ma^{m-1}$$
$$f''(x) = m(m-1)(a+x)^{m-2}, \qquad f''(o) = m(m-1)a^{m-2}, \text{ etc.}$$

et par conséquent

$$f(x) = a_m + \frac{m}{1} a^{m-1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} x^2 + \ldots + x^m$$

V. Jamet (Marseille).

A propos d'un article sur le calcul des probabilités.

Je demande pardon aux lecteurs de la *Revue* de prolonger devant eux un débat qui touche à peine aux mathématiques bien qu'il y soit question de probabilités, assez simple d'ailleurs pour que chacun puisse se faire une opinion personnelle après quelques minutes de réflexion. Mais MM. Vaschide et Piéron semblant induire de notre discussion que la fréquentation des formules est un obstacle nécessaire à l'intelligence des choses, les mathématiciens ne sauraient m'en vouloir de protester doucement contre cet arrêt de déchéance un peu brutal. En défendant une dernière fois mon point de vue, je n'aurai pas d'arguments nouveaux à présenter; il suffira de soumettre à un examen attentif ceux qui ont été produits de part et d'autre.

Je laisse de côté le premier point visé dans ma lettre puisque aussi bien nous sommes maintenant d'accord et j'arrive de suite à l'argument du joueur à rouge et noire.

Nos auteurs consacrent plusieurs lignes à la définition, qu'ils jugent décisive, du mot *série*. Une série, c'est, d'après eux, une succession de coups d'une même couleur précédés et suivis d'un coup de couleur différente. Pour être plus ou moins heureuse une définition n'en est pas moins essentiellement arbitraire; elle est quelquefois indiquée par cet ensemble d'actions et de réactions qu'exercent les uns sur les autres les mots d'une langue et qui constitue son génie, mais elle n'est jamais imposée par la raison et son seul objet est de préciser et d'alléger le langage. A moins que, comme il arrive quelquefois, le choix d'un mot n'ait justement pour but d'égarer la raison en lui suggérant certaines idées préconçues et irraisonnées sur le rôle spécial de l'objet dénommé par rapport aux objets analogues non dénommés; ici, par