ÉQUIVALENCE DES ROTATIONS AUTOUR D'AXES PARALLÈLES ET DES TRANSLATIONS D'UN SYSTÈME INVARIABLE

Autor(en): **Kraft, Ferdinand**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5583

ÉQUIVALENCE DES ROTATIONS

AUTOUR D'AXES PARALLÈLES ET DES TRANSLATIONS D'UN SYSTÈME INVARIABLE

---

§ 1. Nous imaginons un système Σ invariable, matériel ou géométrique ayant pour éléments des points. Nous allons considérer le mouvement de Σ quand il passe d'une position Σ_1 à une autre position Σ_2 sans avoir égard à sa cause. Nous nous occuperons seulement de son changement de position, de la vitesse et des accélérations de ses points, lesquels gardent, puisque Σ est censé invariable, une distance invariable entre eux pendant son mouvement. Le système Σ et ses positions Σ_1 et Σ_2 forment de cette manière trois systèmes congruents. Le système Σ est dans la position Σ_1, quand des éléments homologues des deux systèmes coïncident; Σ est passé de la position Σ_1 à la position Σ_2, quand les éléments homologues de Σ et Σ_2 coïncident, après que tous les points homologues de Σ et de Σ_1 ont coïncidé. Si nous nommons A un élément de Σ, alors A_1 et A_2 représenteront les éléments correspondants de Σ_1 et de Σ_2.

Si le système Σ passe d'une position Σ_1 à une autre position Σ_2, la nature du mouvement de Σ est donnée ou elle est inconnue. Nous allons ici supposer le premier cas et nous allons regarder le mouvement de Σ quand il sera transporté, moyennant des rotations autour d'axes parallèles et des translations d'une position Σ_1 dans une autre position Σ_2.

La méthode de recherches de laquelle nous nous servirons est fondée sur le calcul géométrique. Le lecteur trouvera, ce qui est nécessaire de savoir, dans le traité : « Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitésimale », par Henri Fehr (Paris, Carré et Naud, 1899).

§ 2. *Rotation d'un angle w du système invariable Σ autour d'un axe fixe $\bar{\alpha}$.*

Quand un système invariable Σ tourne autour d'un axe fixe $\bar{\alpha}$, chaque point du système décrit un arc circulaire. Le plan de la trajectoire dont le centre est situé sur l'axe est perpendiculaire audit axe de rotation.

Soit (fig. 1) OA l'axe de rotation, O un point fixe quelconque sur cet axe, ε son vecteur d'unité, w l'angle duquel Σ tourne autour de l'axe, $\overline{OM_0} = \rho_0$ le radius vector d'un point quelconque du système, M_0 ou $M_0 = O + \rho_0$ un point quelconque du système avant le commencement du mouvement (de Σ à la position Σ_1), $M = O + \rho$ la position de ce point après que la rotation a eu lieu (le point homologue dans Σ_2), de sorte que M_0 et M se trouvent dans un plan perpendiculaire à l'axe, et que les perpendiculaires

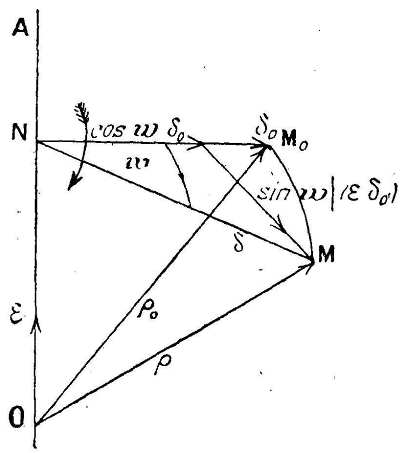

Fig. 1.

de M_0 et M qui tombent sur l'axe s'y coupent en un point N de l'axe. On a $\overline{NM_0}^2 = \overline{NM}^2$. Mettons $\overline{NM_0} = \delta_0$, $\overline{NM} = \delta$, faisons attention que $\overline{OM} = \overline{ON} + \overline{NM}$. Prenons le vecteur unité ε, de telle manière que la rotation, regardée de son élément final, se fasse comme le mouvement d'une aiguille de montre, rotation que nous fixons comme positive. Alors subsistent, puisque $\widehat{M_0NM} = w$ (fig. 1) les équations

$$\rho = (\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon + \delta, \qquad \delta = \cos w\,\delta_0 + \sin w|\,(\varepsilon\delta_0),$$

mais puisque

$$\delta_0 = \rho_0 - (\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon, \qquad (\varepsilon\delta_0) = (\varepsilon\rho_0),$$

il vient aussi

$$\rho = (\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon - \cos w\,[(\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon - \rho_0] + \sin w|\,(\varepsilon\rho_0),$$

ou

$$\rho = (1 - \cos w)\,(\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon + \cos w\,\rho_0 + \sin w|\,(\varepsilon\rho_0).$$

Il s'ensuit de l'équation pour δ_0, si nous rappelons que nous avons $\delta_0^2 = \delta^2$,

$$\delta^2 = [\rho_0 - (\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon]^2,$$

ou

$$\delta^2 = (\varepsilon\rho_0)^2 = r^2 \sin^2(\varepsilon,\rho_0), \qquad \sqrt{\delta^2} = r \sin(\varepsilon,\rho),$$

si r représente la longueur du radius vector ρ, qui est constante pour le point M, pour l'équation de la trajectoire du cercle de ce point du système.

Pour un point du système qui se trouve sur l'axe de rotation, on a $M_0 = N$, $(\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon = \rho_0$, $(\varepsilon\rho_0) = 0$, de manière que $\rho = \rho_0$. Cela veut dire que les points du système qui coïncident avec l'axe de rotation, ne changent pas de place pendant le mouvement de Σ.

La vitesse du point M du système est la dérivée de son radius vector ρ par rapport au temps t.

En différentiant l'équation relative à ρ par rapport à t quand nous désignons la vitesse du point M par $\bar{v}$,

$$\bar{v} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{dw}{dt}\left\{ \sin w\,[(\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon - \rho_0] + \cos w|\,(\varepsilon\rho_0) \right\},$$

ou, quand nous mettons $(dw : dt) = \mathrm{w}$, représente la vitesse angulaire du système Σ autour de l'axe $\bar{\alpha}$,

$$\bar{v} = \mathrm{w}\left\{ \cos w|\,(\varepsilon\rho_0) + \sin w\,[(\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon - \rho_0] \right\};$$

mais nous obtenons, en multipliant l'équation en ρ par ε,

$$\begin{aligned}(\varepsilon\rho) &= \cos w\,(\varepsilon\rho_0) + \sin w\,[\varepsilon|(\varepsilon\rho_0)] \\ &= \cos w\,(\varepsilon\rho_0) + \sin w\,[(\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon - \rho_0],\end{aligned}$$

par conséquent on a aussi

$$\bar{v} = \mathrm{w}|\,(\varepsilon\rho) = \mathrm{w}|\,(\varepsilon\delta).$$

La quadrature intérieure des membres de cette équation donne

$$\bar{v}^2 = v^2 = \mathrm{w}^2\,(\varepsilon\rho)^2 = \mathrm{w}^2\,(\varepsilon\rho)^2,$$

et il vient, avec $\delta^2 = h^2$,

$$v = \mathrm{w} r \sin(\varepsilon,\rho) = \mathrm{w} h.$$

La vitesse $\bar{v}$ du point M est perpendiculaire au plan déterminé par l'axe de rotation et le point M. Sa grandeur est égale au produit de la vitesse angulaire du système au même temps par la distance de ce point à l'axe.

§ 2'. Si le système Σ fait une rotation infiniment petite autour de l'axe $\bar{\alpha}$ de l'angle dw, alors nous avons, à cause de $\cos dw = 1$, $\sin dw = dw$.

$$\rho = \rho_0 + dw|(\varepsilon\rho_0).$$
$$d\rho = \rho - \rho_0 = dw|(\varepsilon\rho_0),$$
$$\bar{v} = \frac{d\rho}{dt} = \mathrm{w}|(\varepsilon\rho_0) = \mathrm{w}|(\varepsilon\delta_0) = \mathrm{w}|(\varepsilon\delta).$$

Il résulte de la dernière équation, pour la vitesse $\bar{v}$, si nous la différentions par rapport au temps t, l'accélération $\bar{\varphi}$ du point M du système au temps t, savoir

$$\bar{\varphi} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\rho}{dt^2} = \mathrm{w}|\left(\varepsilon\frac{d\rho}{dt}\right) + \frac{d\mathrm{w}}{dt}|(\varepsilon\rho),$$

ou, avec la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ et $\frac{d\mathrm{w}}{dt} = \mathrm{w}'$, qui est l'accélération angulaire du système Σ,

$$\bar{\varphi} = \mathrm{w}|[\varepsilon\mathrm{w}|(\varepsilon\rho)] + \mathrm{w}'|(\varepsilon\delta),$$

ce qui peut s'écrire

$$\bar{\varphi} = -\mathrm{w}^2\{\rho - (\varepsilon|\rho)\varepsilon\} + \mathrm{w}'|(\varepsilon\rho), \qquad \bar{\varphi}|\varepsilon = 0,$$

ou

$$\bar{\varphi} = -\mathrm{w}^2\delta + \mathrm{w}'|(\varepsilon\delta).$$

D'après ce qui précède, l'accélération $\bar{\varphi}$ paraît être la somme de deux composantes $\overline{\varphi_n}$ et $\overline{\varphi_t}$ savoir

$$\overline{\varphi_n} = -\mathrm{w}^2(\varepsilon\rho)|\varepsilon = -\mathrm{w}^2\delta,$$
$$\overline{\varphi_t} = \mathrm{w}'|(\varepsilon\rho) = \mathrm{w}'|(\varepsilon\delta) = \frac{\mathrm{w}'}{\mathrm{w}}\bar{v};$$

la première, $\overline{\varphi_n}$, est normale à la trajectoire du point du système, sa direction tend vers l'axe, sa grandeur est égale au carré de la vitesse angulaire multipliée par la distance du point du système à l'axe; la seconde va directement du côté de la vitesse $\bar{v}$; $\overline{\varphi_n}$

et $\overline{\varphi}_t$ sont appelés à cause de cela la composante normale et la composante tangentielle de l'accélération $\overline{\varphi}$, qui est, à cause de $\overline{\varphi}\,|\varepsilon = o$, perpendiculaire à l'axe.

Pour l'angle d'inclinaison b_2 de $\overline{\varphi}$ vers δ nous obtenons

$$\operatorname{tang} b_2 = \frac{\sqrt{(\overline{\delta\varphi})^2}}{\delta\,|\,\overline{\varphi}} = -\frac{w'}{w^2},$$

de sorte que les accélérations de tous les points du système avec les normales de leurs trajectoires renferment le même angle.

En élevant les côtés de l'équation $\overline{\varphi}$ à la quadrature intérieure nous obtenons pour la grandeur de l'accélération.

$$\overline{\varphi}^2 = (w^4 + w'^2)\,\delta^2, \qquad \varphi = h\sqrt{w^4 + w'^2}.$$

La différentiation successive de l'équation du radius vector ρ du point M à l'égard du temps nous conduit à des vitesses et aussi à des accélérations d'ordres supérieurs de ce point de système.

Il suit de l'équation

$$\overline{v}^{(2)} = \overline{\varphi} = -w^2(\varepsilon\rho)\,|\,\varepsilon + w'\,|\,(\varepsilon\rho)$$

par différentiation par rapport à t

$$\overline{v}^{(3)} = \overline{\varphi}^{(2)} = \frac{d^3\rho}{dt^3} = -2ww'(\varepsilon\rho)\,|\,\varepsilon - w^2(\varepsilon\rho')\,|\,\varepsilon$$
$$+ w''\,|\,(\varepsilon\rho) + w'\,|\,(\varepsilon\rho'),$$

et, en remarquant que $\rho' = w|\,(\varepsilon\rho)$, il résulte

$$\overline{v}^{(3)} = \overline{\varphi}^{(2)} = -3ww'(\varepsilon\rho)\,|\,\varepsilon - (w^3 - w'')\,|\,(\varepsilon\rho)$$
$$= -3ww'\delta - (w^3 - w'')\,|\,(\varepsilon\delta), \quad \overline{\varphi}^{(2)}\,|\,\varepsilon = o.$$

Aussi cette vitesse paraît composée d'une composante normale et d'une composante tangentielle, elle se trouve de même dans le plan de la trajectoire du point M.

Pour l'angle d'inclination b_3 de la troisième vitesse vers la normale de la trajectoire (M) nous obtenons

$$\operatorname{tang} b_3 = \frac{\sqrt{(\overline{\delta\varphi}^{(2)})^2}}{\delta\,|\,\overline{\varphi}^{(2)}} = \frac{w^3 - w''}{3ww'},$$

il est le même pour tous les points de système. De plus, nous obtenons pour la grandeur de cette vitesse

$$(\varphi^2)^2 = h^2 \left\{ 9\mathrm{w}^2\mathrm{w}'^2 + (\mathrm{w}^3 - \mathrm{w}'')^2 \right\}.$$

Il est évident qu'on peut aller plus loin.

En général on a, comme nous voyons

$$\bar{v}^{(n)} = \bar{\varphi}^{(n-1)} = a_n(\varepsilon\rho) \mid \varepsilon + b_n \mid (\varepsilon\rho), \qquad \bar{v}^{(n)} \mid \varepsilon = 0.$$
$$= a_n\delta + b_n \mid (\varepsilon\delta).$$

L'équation générale du radius vector de la ligne droite qui passe par les points $A_2 = O + \rho_1$, $B_2 = O + \rho_2$ du système Σ dans la position Σ_2 ou de Σ au temps t est

$$\rho = m\rho_1 + n\rho_2, \qquad m + n = 1.$$

Les vitesses successives d'un point quelconque de cette ligne sont

$$\frac{d\rho}{dt} = m\frac{d\rho_1}{dt} + n\frac{d\rho_2}{dt}, \ldots$$

ou

$$\rho' = m\rho'_1 + n\rho'_2$$

et

$$\rho'' = m\rho_1'' + n\rho_2'', \qquad m + n = 1,$$

$$\rho^{(n)} = m\rho_1^{(n)} + \rho_2^{(n)}.$$

Posons

$$\chi_k = \rho_k + \rho_k^{(n)},$$

alors nous obtenons encore

$$\chi = m\chi_1 + n\chi_2, \qquad m + n = 1.$$

Avec ρ', ρ'',... $\rho^{(n)}$ et χ comme radius vector toutes ces équations sont celles de lignes droites, ce qui fait que nous arrivons au théorème suivant :

L'hodographe des vitesses de tout ordre des points d'une droite du système est une ligne droite. Les éléments terminaux des vitesses de tout ordre des points d'une droite du système se trouvent sur une ligne droite.

Nous appelons l'ensemble des vitesses d'ordre n des points du système Σ son système des vitesses d'ordre n.

Puisque $\bar{v} = \mathrm{w}|(\varepsilon\rho)$, l'équation de l'hodographe de vitesse de la droite du système est

$$\rho' = w\,[m\,|\,(\varepsilon\rho_1) + n\,|\,(\varepsilon\rho_2)].$$

Il faut donc que pour une droite du système soit sans vitesse

$$m\,(\varepsilon\rho_1) + n\,(\varepsilon\rho_2) = 0.$$

Cette équation existe seulement quand on a

$$(\varepsilon\rho_1\rho_2) = 0,$$

ou

$$\varepsilon\rho_1 = 0 \text{ et } \varepsilon\rho_2 = 0.$$

Il faut donc qu'à cause de la première de ces équations les vecteurs ε, ρ_1 et ρ_2 soient parallèles à un plan, c'est-à-dire il faut que la droite coupe l'axe de rotation; son intersection avec l'axe n'a pas de vitesse. Le second résultat nous enseigne qu'il faut que ρ_1 et ρ_2 soient parallèles à ε, de sorte qu'il faut que la droite coïncide avec l'axe de rotation, c'est-à-dire que tous les points du système qui se trouvent sur l'axe de rotation sont sans vitesse.

Pour une droite du système, dont les points ont une même vitesse, il faut que l'on ait

$$\bar{v} = \mathrm{w}\,|\,(\varepsilon\rho) = \mathrm{w}\,|\,(\varepsilon\rho_1) = \mathrm{w}.(\varepsilon\rho_2)$$

ou

$$(\varepsilon\rho) = (\varepsilon\rho_1) = (\varepsilon\rho_2),$$

d'où s'ensuit

$$\varepsilon.(\rho_1 - \rho_2) = 0,$$

c'est-à-dire il faut que la droite soit parallèle à l'axe de rotation.

Les points d'une droite du système parallèle à l'axe de rotation possèdent la même vitesse. Par conséquent toutes les sections planes du système Σ perpendiculaires à l'axe de rotation ont le même mouvement ou des mouvements congruents.

§ 3. *Le système invariable Σ tourne successivement autour des axes $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$, qui sont parallèles l'un à l'autre, des angles w_1 et w_2.*

Soit ε le vecteur unité des axes, $\overline{OL} = \lambda$ la distance de l'un à l'autre, on a $(\varepsilon \mid \lambda) = 0$, puisque $\overline{OL}$ est perpendiculaire à $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ (fig. 2). Avant le commencement du mouvement, soit $M_0 = O + \rho_0$ un point quelconque du système.

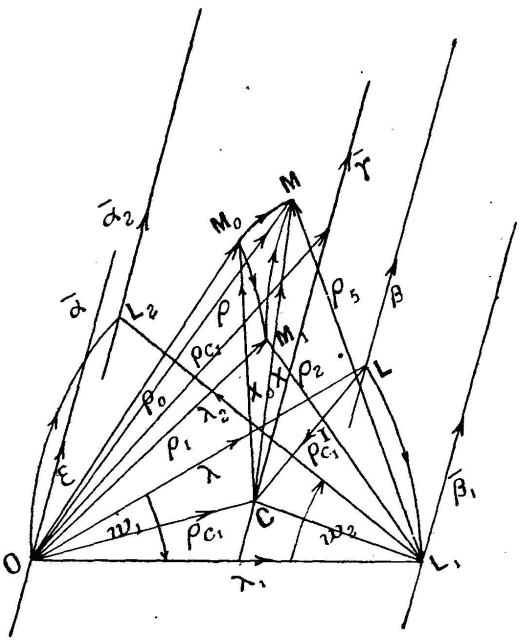

Fig. 2.

Par suite de la rotation autour de l'axe $\bar{\alpha}$ d'un angle w_1 le point de système M_0 vient en $M_1 = O + \rho_1$, le point $L = O + \lambda$ du second axe $\bar{\beta}$ en $L_1 = O + \lambda_1$, et l'axe $\bar{\beta}$ dans la position β_1.

Il vient donc selon le § 2 :

$$\rho_1 = (1 - \cos w_1)(\varepsilon \mid \rho_0)\,\varepsilon + \cos w_1 \rho_0 + \sin w_1 \mid (\varepsilon\rho_0),$$

$$\lambda_1 = \cos w_1 \lambda + \sin w_1 \mid (\varepsilon\lambda),$$

$$\overline{L_1 M_1} = \rho_2 = \rho_1 - \lambda_1$$

$$= (1 - \cos w_1)(\varepsilon \mid \rho_0)\,\varepsilon + \cos w_1 (\rho_0 - \lambda) + \sin w_1 \mid [\varepsilon(\rho_0 - \lambda)].$$

L'équation de l'axe $\bar{\beta}$ est

$$\rho_\beta = \lambda + u\varepsilon,$$

celle de l'axe $\overline{\beta_1}$

$$\rho_{\beta_1} = \lambda_1 + u\varepsilon,$$

ou

$$\rho_{\beta_1} = \cos w_1 \lambda + \sin w_1 \mid (\varepsilon\lambda) + u\varepsilon.$$

Alors le système Σ tourne autour de l'axe $\overline{\beta_1}$ de l'angle w_2. Par cela même le point de système M_1 vient à la position $M = L_1 + \rho_3$, et on a

$$\rho_3 = (1 - \cos w_2)(\varepsilon \mid \rho_2)\,\varepsilon + \cos w_2 \rho_2 + \sin w_2 \mid (\varepsilon\rho_2).$$

Prenons maintenant $M = O + \rho = O + \lambda_1 + \rho_3$, alors nous obtenons, en posant $\rho_3 = \rho - \lambda_1$, $\rho_2 = \rho_1 - \lambda_1$,

$$\rho = (1 - \cos w_2)(\varepsilon \mid \rho_1)\,\varepsilon + \cos w_2 (\rho_1 - \lambda_1) + \sin w_1 \mid [\varepsilon(\rho_1 - \lambda_1)] + \lambda_1,$$

la substitution des valeurs ci-dessus de ρ_1 et λ_1 dans cette équation donne

$$\begin{aligned}\rho = (1 - \cos w_2) \{ (1 - \cos w_1)(\varepsilon \mid \rho_0) + \cos w_1 (\varepsilon \mid \rho_0) \} \varepsilon \\ + \cos w_2 \{ (1 - \cos w_1)(\varepsilon \mid \rho_0)\varepsilon + \cos w_1 (\rho_0 - \lambda) + \sin w_1 \mid [\varepsilon(\rho_0 - \lambda)] \} \\ + \sin w_2 \mid \{ \cos w_1 \varepsilon (\rho_0 - \lambda) + \sin w_1 \varepsilon \mid [\varepsilon(\rho_0 - \lambda)] \} \\ + \cos w_1 \lambda + \sin w_1 \mid (\varepsilon\lambda),\end{aligned}$$

et, si nous réduisons, en faisant attention que

$$\mid \varepsilon[\varepsilon(\rho_0 - \lambda)] = -[\varepsilon(\rho_0 - \lambda)] \mid \varepsilon = - \{ (\rho_0 - \lambda) - (\varepsilon \mid \rho_0)\varepsilon \},$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}\rho = \cos w_1 \lambda + \sin w_1 \mid (\varepsilon\lambda) + \{ 1 - \cos(w_1 + w_2) \} (\varepsilon \mid \rho_0)\varepsilon \\ + \cos(w_1 + w_2)(\rho_0 - \lambda) + \sin(w_1 + w_2) \mid [\varepsilon(\rho_0 - \lambda)],\end{aligned}$$

ou, si nous posons

$$w_1 + w_2 = w,$$

$$\begin{aligned}\rho = (\cos w_1 - \cos w)\lambda + (\sin w_1 - \sin w) \mid (\varepsilon\lambda) \\ + (1 - \cos w)(\varepsilon \mid \rho_0)\varepsilon + \cos w \rho_0 + \sin w \mid (\varepsilon\rho_0).\end{aligned}$$

Cette équation représente le radius vector d'un point du système quelconque, les rotations autour les axes $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ ayant lieu.

Pendant la seconde rotation l'axe $\overline{\beta_1}$ ne change pas de place, il résulte de la dernière équation et de $\rho_0 = \lambda + u\varepsilon$,

$$\rho_{\beta_1} = \cos w_1 \lambda + \sin w_1 \mid (\varepsilon\lambda) + u\varepsilon,$$

comme plus haut, mais l'axe α passant à la position $\overline{\alpha_2}$, nous obtenons, avec $\rho_0 = u\varepsilon$,

$$\rho_{\alpha_2} = (\cos w_1 - \cos w)\lambda + (\sin w_1 - \sin w) \mid (\varepsilon\lambda) + u\varepsilon$$

comme équation de cet axe après les deux rotations.

Par ces deux rotations le vecteur $\lambda = \overline{OL}$ vient dans la position $\overline{L_2L_1}$; on a

$$\rho_{L_2} = (\cos w_1 - \cos w)\lambda + (\sin w_1 - \sin w) \mid (\varepsilon\lambda),$$

et comme

$$\lambda = \cos w_1 \lambda_1 - \sin w_1 \mid (\varepsilon\lambda_1),$$

nous trouvons

$$\rho_{L2} = \lambda_1 - \{ \cos w_2 \lambda_1 + \sin w_2 \mid (\varepsilon\lambda_1) \}.$$

de sorte qu'il vient

$$\overline{L_1L_2} = \rho_{L2} - \lambda_1 = -\left\{\cos w_2\lambda_1 + \sin w_2 \mid (\varepsilon\lambda_1)\right\}.$$

Si nous prenons le point L_1 comme pôle des coordonnées, il s'ensuit pour l'axe $\overline{\alpha}_2$, puisque maintenant $\rho_2 = -\lambda_1 + u\varepsilon$ est l'équation de $\overline{\alpha}$,

$$\rho^{I}{}_{\alpha_2} = (1 - \cos w_2)\,[\varepsilon \mid (u\varepsilon - \lambda_1)]\,\varepsilon + \cos w_2\,(u\varepsilon - \lambda_1)$$
$$+ \sin w_2 \mid [\varepsilon\,(u\varepsilon - \lambda_1)],$$

ou

$$\rho^{I}{}_{\alpha_2} = -\left\{\cos w_2\lambda_1 + \sin w_2 \mid (\varepsilon\lambda_1)\right\} + u\varepsilon.$$

Si $M_0 = O + \mu_0$, $N_0 = O + \nu_0$ sont deux points du système avant le commencement des rotations, $M = O + \mu$, $N = O + \nu$ les positions de ces points après, on a

$$(\nu - \mu) = (1 - \cos w)\,[\varepsilon \mid (\nu_0 - \mu_0)]\,\varepsilon + \cos w\,(\nu_0 - \mu_0)$$
$$+ \sin w \mid [\varepsilon\,(\nu_0 - \mu_0)],$$

ou

$$\overline{MN} = (1 - \cos w)\,[\varepsilon \mid \overline{M_0N_0}]\,\varepsilon + \cos w\overline{M_0N_0} + \sin w \mid [\varepsilon\overline{M_0N_0}].$$

Chaque vecteur du système et par conséquent aussi chaque droite du système tourne, à cause des deux rotations du système Σ autour les axes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ de l'angle $w = (w_1 + w_2)$. Les axes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ font seuls une exception, le premier tournant de l'angle w_2, le dernier de l'angle w_1, ce qui est clair d'après les équations données pour $\overline{\alpha}_2$ et $\overline{\beta}_1$.

Maintenant nous allons examiner si le système invariable Σ a des points qui ne changent pas de positions, malgré les deux rotations.

Si $U = O + \rho_c$ est un tel point, il faut donc que la condition $\rho_c = \rho_0 = \rho$, existe pour lui et par conséquent, à cause de l'équation pour ρ, cette condition devient

$$\rho_c = (\cos w_1 - \cos w)\,\lambda + (\sin w_1 - \sin w) \mid (\varepsilon\lambda)$$
$$+ (1 - \cos w)\,(\varepsilon \mid \rho_c)\,\varepsilon + \cos w\rho_c + \sin w \mid (\varepsilon\rho_c),$$

ou, en réduisant,

$$(\cos w_1 - \cos w)\,\lambda + (\sin w_1 - \sin w) \mid (\varepsilon\lambda) - (1 - \cos w)\,[(\varepsilon\rho_c) \mid \varepsilon]$$
$$+ \sin w \mid (\varepsilon\rho_c) = 0.$$

Alors, le radius vector ρ_c peut toujours être décomposé numériquement en trois vecteurs non coplanaires, nous posons donc

$$\rho_c = u_1\varepsilon + u_2\lambda + u_3|(\varepsilon\lambda).$$

De cette équation, suit

$$(\varepsilon\rho_c) = u_2(\varepsilon\lambda) + u_3\varepsilon|(\varepsilon\lambda), \quad |(\varepsilon\rho_c) = u_2|(\varepsilon\lambda) - u_3(\varepsilon\lambda)|\varepsilon,$$
$$(\varepsilon\rho_c)|\varepsilon = u_2\lambda + u_3|(\varepsilon\lambda).$$

La substitution de ces valeurs à l'équation de condition pour ρ_c donne

$$\left\{\cos w_1 - \cos w + u_2(1 - \cos w) - u_3 \sin w\right\}\lambda$$
$$+ \left\{\sin w_1 - \sin w + u_2 \sin w - u_3(1 - \cos w)\right\}|(\varepsilon\lambda) = 0.$$

Cette équation ne saurait être remplie; c'est

$$\cos w_1 - \cos w + u_2(1 - \cos w) + u_3 \sin w = 0,$$
$$\sin w_1 - \sin w + u_2 \sin w - u_3(1 - \cos w) = 0,$$

qui donnent des relations

$$u_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}w_2}{\sin\frac{1}{2}w}\cos\frac{1}{2}w_1, \qquad u_3 = \frac{\sin\frac{1}{2}w_2}{\sin\frac{1}{2}w}\sin\frac{1}{2}w_1,$$

Le coefficient u_1, au contraire, reste indéfini.

Si nous formons avec ces valeurs la dernière équation pour ρ_c, il résulte alors, comme équation de radius vecteur du lieu des points sans déplacement

$$\rho_c = \frac{\sin\frac{1}{2}w_2}{\sin\frac{1}{2}w}\left\{\cos\frac{1}{2}w_1\lambda + \sin\frac{1}{2}w_1|(\varepsilon\lambda)\right\} + u\varepsilon,$$

d'où il suit :

L'endroit des points de système, qui ne changent pas de situation par les deux rotations, est une ligne droite parallèle aux deux axes de rotation.

Plaçons maintenant le point de rotation en un point quelconque de cette ligne singulière. D'après la première équation pour ρ_c, il viendra, si nous mettons $(\rho - \rho_c) = \chi$,

$$\chi = (1 - \cos w)\left\{\varepsilon|(\rho_0 - \rho_c)\right\}\varepsilon + \cos w(\rho_0 - \rho_c) + \sin w|\left\{\varepsilon(\rho_0 - \rho_c)\right\},$$

ou, en prenant $(\rho_0 - \rho_c) = \chi_0$,

$$\chi = (1 - \cos w)\,(\varepsilon|\chi_0)\,\varepsilon + \cos w\chi_0 + \sin w|(\varepsilon\chi_0).$$

Le système Σ tourne donc, par suite des deux rotations autour des axes $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$, autour d'un axe $\bar{\gamma}$, qui est parallèle à $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$, de l'angle $w = (w_1 + w_2)$.

Les trois axes $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ sont les arêtes d'un prisme, les axes $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}_1$ et $\bar{\gamma}$ ceux d'un second prisme, les deux prismes ont les arêtes $\bar{\alpha}$ et $\bar{\gamma}$ en commun, ils sont symétriquement congruents.

Pour l'intersection C de l'axe $\bar{\gamma}$ et du plan passant par λ et perpendiculaire à ε, on trouve, avec $C = O + \rho_{c1} = L + \rho^I_{c1}$, les équations

$$\rho_{c1} = \frac{\sin\frac{1}{2}w_2}{\sin\frac{1}{2}w}\left\{\cos\frac{1}{2}w_1\lambda + \sin\frac{1}{2}w_1|(\varepsilon\lambda)\right\},$$

$$\rho^I_{c1} = -\frac{\sin\frac{1}{2}w_1}{\sin\frac{1}{2}w}\left\{\cos\frac{1}{2}w_2\lambda - \sin\frac{1}{2}w_2|(\varepsilon\lambda)\right\},$$

car on a $\rho^I_{c1} = \rho_c - \lambda$; de plus, nous avons

$$\frac{\sqrt{(\lambda\rho_{c1})^2}}{\lambda|\rho_{c1}} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}w_1, \qquad \frac{\sqrt{(\lambda\rho^I_{c1})^2}}{\lambda|\rho^I_{c1}} = -\operatorname{tang}\frac{1}{2}w_2,$$

par conséquent, il vient

$$\widehat{LOC} = \frac{1}{2}w_1, \qquad \widehat{OLC} = -\frac{1}{2}w_2.$$

N'ayant rien supposé de particulier à l'égard des angles w_1 et w_2 et de leur manière réciproque d'être engendré, les résultats sont généraux.

Le système invariable Σ tourne maintenant d'abord autour de l'axe $\bar{\beta}$ de l'angle w_2, ensuite autour de l'axe $\bar{\alpha}$ de l'angle w_1.

Dans ces conditions, en choisissant le point L comme l'origine des coordonnées, le calcul se fait ainsi, en mettant $\overline{LM_0} = \rho^I_0$, $\overline{LO} = \lambda^I = -\lambda$, $\overline{LM} = \rho^I$, précisément comme avant, et si nous échangeons, dans les résultats tout à l'heure obtenus, w_2 avec w_1, λ avec λ^I, ρ_0 avec ρ^I_0, nous obtenons immédiatement

$$\rho^I = (\cos w_2 - \cos w)\,\lambda^I + (\sin w_2 - \sin w)|(\varepsilon\lambda^I)$$
$$+ (1 - \cos w)\,(\varepsilon|\rho^I_0)\,\varepsilon + \cos w\rho^I_0 + \sin w|(\varepsilon\rho^I_0),$$

de plus, avec $M = L + \rho_c^I$, pour le lieu des points sans déplacement

$$\rho^I{}_c = \frac{\sin \frac{1}{2} w_1}{\sin \frac{1}{2} w} \left\{ \cos \frac{1}{2} w_2 \lambda^I + \sin \frac{1}{2} w_2 \mid (\varepsilon\lambda^I) \right\} + u\varepsilon.$$

Prenons maintenant le point O comme pôle des coordonnées, alors il faut mettre $\lambda^I = -\lambda$, $\rho_0^I = (\rho_0 - \lambda)$, $\rho^I = (\rho_I - \lambda)$, d'où il résulte

$$\begin{aligned} \rho_I = (1 - \cos w_2)\, \lambda + (\sin w - \sin w_2) \mid (\varepsilon\lambda) \\ + (1 - \cos w)\, (\varepsilon \mid \rho_0)\, \varepsilon + \cos w \rho_0 + \sin w \mid [\varepsilon\, (\rho_0 - \lambda)] \geqq \rho, \end{aligned}$$

et l'équation de l'axe de rotation sera (en observant que $\rho_{c_1} = \lambda + \rho_c^I$)

$$\rho_{c_I} = \lambda - \frac{\sin \frac{1}{2} w_1}{\sin \frac{1}{2} w} \left\{ \cos \frac{1}{2} w_2 \lambda + \sin \frac{1}{2} w_2 \mid (\varepsilon\lambda) \right\} + u\varepsilon \geqq \rho_c.$$

Mettons l'origine des coordonnées en n'importe quel point de l'axe de la rotation résultante (ρ_{cI}), mettons $(\rho_I - \rho_{cI}) = \chi_I$, $(\rho_0 - \rho_{cI}) = \chi_0^I$, alors nous trouvons de la même manière que pour l'axe (ρ_c) :

$$\chi_I = (1 - \cos w)\, (\varepsilon\chi_0{}^I)\, \varepsilon + \cos w \chi_0{}^I + \sin w \mid (\varepsilon\chi_0{}^I).$$

Dans le second axe, les points du système ont donc, après les deux rotations, une position différente de celle du premier cas; l'axe de la rotation résultante n'est pas le même dans le second que dans le premier cas, cependant les deux axes sont parallèles aux axes de rotation donnés, et les amplitudes des rotations résultantes sont égales entre elles. L'ordre de la suite des rotations n'est pas à changer.

« Si un système invariable Σ tourne successivement autour des axes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$, parallèles l'un à l'autre, des angles w_1 et w_2 respectivement, alors son mouvement est équivalent à sa rotation autour d'un troisième axe $\overline{\gamma}$, parallèle aux axes donnés, de l'angle $w = (w_1 + w_2)$ et l'ordre de successions des rotations n'est pas à changer. »

Si les amplitudes des rotations w_1 et w_2 sont opposées ou égales, c'est-à-dire s'il s'agit d'un couple de rotation, alors w_1 est censé positif, et, le premier cas supposé, l'amplitude de rotation résultante

$$w = w_1 - w_1 = 0,$$

le radius vector d'un point du système quelconque après les rotations autour des axes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$

$$\rho = (\cos w_1 - 1)\,\lambda + \sin w_1 | (\varepsilon\lambda) + \rho_0,$$

et si τ désigne le déplacement total de ce point du système, alors nous avons

$$\tau = \rho - \rho_0 = (\cos w_1 - 1)\,\lambda + \sin w_1 | (\varepsilon\lambda).$$

Mais l'expression pour τ est la même pour tous les points du système; à cause de cela, le système, par les rotations autour les axes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ successivement, dont les angles sont w_1 et $-w_1$, subit la translation τ.

Il résulte de l'équation pour τ

$$\tau = \lambda_1 - \lambda, \qquad \tau | \varepsilon = 0,$$

de plus, l'équation de l'axe de rotation résultant $\overline{\gamma}$ est à présent

$$\rho_c = \infty \left\{ \cos \frac{1}{2} w_1 \lambda + \sin \frac{1}{2} w_1 | (\varepsilon\lambda) \right\} + u\varepsilon,$$

et on a

$$(\lambda_1 - \lambda) | \left\{ \cos \frac{1}{2} w_1 \lambda + \sin \frac{1}{2} w_1 | (\varepsilon\lambda) \right\} = 0,$$

comme on voit aisément, quand on calcule le produit avec la valeur de $(\lambda_1 - \lambda)$ sur le membre gauche de cette équation.

Conséquemment, la translation τ est perpendiculaire aux axes des rotations donnés et à la bissectrice de l'angle LOL_1.

Pour la grandeur de la translation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tau^2 &= (\cos w_1 - 1)^2 l^2 + \sin^2 w_1 l^2 = 2\,(1 - \cos w_1)\, l^2 \\ &= 4 \sin^2 \frac{1}{2} w_1 l^2. \end{aligned}$$

Si le système Σ d'abord tourne autour de l'axe $\overline{\beta}$ de l'angle $-w_1$, ensuite autour de l'axe $\overline{\alpha}$ par l'angle w_1, nous obtenons pour le radius vector d'un point du système quelconque, avec L comme pôle de coordonnées, après les deux rotations

$$\rho^{\mathrm{I}} = (\cos w_1 - 1)\,\lambda^{\mathrm{I}} - \sin w_1 \,|\, (\varepsilon\lambda^{\mathrm{I}}) + \rho^{\mathrm{I}}_0,$$
$$\tau^{\mathrm{I}} = \rho^{\mathrm{I}} - \rho^{\mathrm{I}}_0 = (\cos w_1 - 1)\,\lambda^{\mathrm{I}} - \sin w_1 \,|\, (\varepsilon\lambda^{\mathrm{I}}).$$

et, avec le point O comme pôle, il résulte

$$\tau^{\mathrm{I}} = \rho_{\mathrm{I}} - \rho_0 = -\left\{ (\cos w_1 - 1)\,\lambda + \sin w_1 \,|\, (\varepsilon\lambda) \right\} \gtreqless \tau.$$

La translation du système n'est pas égale maintenant à celle du cas précédent.

« La suite de deux rotations opposées égales autour d'axes parallèles est une translation équivalente et l'ordre de cette succession ne se peut intervertir ».

Si les axes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ coïncident, $\lambda = 0$, l'axe $\overline{\gamma}$ coïncide avec eux; $w = w_1 + w_2$ et on peut changer l'ordre de la succession des rotations; avec $w_2 = -w_1$, on aura $w = 0$. Des rotations opposées égales autour du même axe s'annulent.

§ 3[1]. Si les rotations autour les axes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ sont infiniment petites, si leurs angles sont dw_1 et dw_2, nous obtenons immédiatement, en vertu des résultats pour des rotations finies, les équations dont il s'agit maintenant, en mettant pour w_1 et w_2 les amplitudes infiniment petites dw_1 et dw_2 resp., remarquons qu'alors $\cos dw = 1$, $\sin dw = dw$.

Si successivement les rotations infiniment petites ont lieu autour les axes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$, alors le radius vector d'un point M du système quelconque, après que les deux rotations sont achevées

$$\rho = - dw_2 \,|\, (\varepsilon\lambda) + \rho_0 + dw \,|\, (\varepsilon\rho_0), \qquad dw = dw_1 + dw_2;$$

les équations des axes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$, à la fin du mouvement du système, sont

$$\rho_{\alpha_2} = dw_2 \,|\, (\lambda\varepsilon) + u\varepsilon \equiv u\varepsilon,$$
$$\rho_{\beta_1} = \lambda + dw_1 \,|\, (\varepsilon\lambda) + u\varepsilon \equiv \lambda + u\varepsilon,$$

ces axes se déplacent infiniment peu perpendiculairement au plan $[\varepsilon\lambda]$, de sorte que, si des quantités infiniment petites sont négligées, ils ne changent pas de situation dans l'espace.

Pour l'axe de rotation résultant $\overline{\gamma}$ nous obtenons l'équation

$$\rho_c = \frac{dw_2}{dw}\left\{\lambda + \frac{1}{2}\,dw\,|\,(\varepsilon\lambda)\right\} + u\varepsilon,$$

$$\rho_c \equiv \frac{dw_2}{dw}\,\lambda + u\varepsilon,$$

et si nous prenons le point L pour le pôle des coordonnées et si nous désignons le radius vector de l'axe $\overline{\gamma}$, pris en partant de lui, par $\rho_c^{(1)}$, ou alors $\rho_c^{(1)} = \rho_c - \lambda$, on a

$$\rho_c^{(1)} = -\frac{dw_1}{dw}\left\{\lambda - dw_2\,|\,(\varepsilon\lambda)\right\} + u\varepsilon,$$

$$\rho_c^{(1)} \equiv -\frac{dw_1}{dw}\,\lambda + u\varepsilon,$$

de sorte que l'axe $\overline{\gamma}$ est parallèle aux axes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$, et situé dans le plan déterminé par eux, partageant le vecteur λ en proportion inverse aux angles des rotations dw_1 et dw_2.

Si d'abord la rotation du système Σ a lieu autour de l'axe $\overline{\beta}$ de l'angle dw_2 et puis autour de l'axe $\overline{\alpha}$ de l'angle dw_1, on obtient les mêmes résultats, les axes de rotations résultants des deux cas tombant sur la même ligne droite. L'ordre de la succession des rotations infiniment petites autour des axes parallèles peut donc s'intervertir.

En choisissant maintenant un point de l'axe $\overline{\gamma}$ pour pôle des radii vectores, le radius vector du point M sera alors

$$\chi = \rho - \rho_c = (\rho_0 - \rho_c) + dw\,|\,[\varepsilon(\rho_0 - \rho_c)]$$

ou

$$\chi = \chi_0 + dw\,|\,(\varepsilon\chi_0),$$

le système Σ tournant autour d'eux de l'angle $dw = dw_1 + dw_2$.

Un système invariable Σ tournant successivement autour de deux axes parallèles différents d'angles infiniment petits; son mouvement est équivalent à une rotation infiniment petite autour d'un troisième axe parallèle à ces axes et situé dans le plan de ces axes; l'amplitude de la rotation autour de ce troisième axe est égale à la somme des amplitudes données et l'ordre de la succession des rotations données est indifférent.

Si les angles des rotations infiniment petites dw_1 et dw_2 sont opposés et égaux, alors nous trouvons, avec $dw_2 = - dw_1$,

$$\rho = \rho_0 + dw_1 \,|\, (\varepsilon\lambda), \qquad d\tau = \rho - \rho_0 = dw_1 \,|\, (\varepsilon\lambda),$$
$$\rho_c = \infty\,\lambda + u\varepsilon, \qquad dw = 0.$$

« La suite de deux rotations infiniment petites, opposées égales autour des axes parallèles est équivalente à une translation infiniment petite perpendiculaire au plan de ces axes, l'axe de la rotation résultante est situé infiniment loin dans le plan des axes donnés, l'angle de la rotation est nul, et l'ordre de la succession des rotations peut être interverti. »

Par cela, la rotation du système Σ autour des axes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$, qui sont parallèles l'un à l'autre, est ramenée à la rotation autour d'un troisième axe parallèle aux deux premiers.

Si les amplitudes des rotations données sont infiniment petites, alors l'élément de la trajectoire d'un point quelconque du système est

$$d\rho = \rho - \rho_0 = dw_2 \,|\, (\lambda\varepsilon) + dw \,|\, (\varepsilon\rho_0);$$

par conséquent, la vitesse de ce point est

$$\overline{v} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{dw_2}{dt} \,|\, (\lambda\varepsilon) + \frac{dw}{dt} \,|\, (\varepsilon\rho_0);$$

ou

$$\overline{v} = \mathrm{w}_2 \,|\, (\lambda\varepsilon) + \mathrm{w} \,|\, (\varepsilon\rho_0), \qquad \mathrm{w} = \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2;$$

nous avons aussi

$$d\rho = \chi - \chi_0 = dw \,|\, (\varepsilon\chi_0), \qquad \overline{v} = \mathrm{w} \,|\, (\varepsilon\chi_0).$$

Dans ce cas-ci, on peut écrire l'équation de l'axe de la rotation résultante

$$\rho_c = \left(\frac{dw_2}{dt} : \frac{dw}{dt}\right)\lambda + u\varepsilon.$$

On a alors aussi

$$\rho_c = \frac{\mathrm{w}_2}{\mathrm{w}}\,\lambda + u\varepsilon, \quad \rho_c^{(1)} = -\frac{\mathrm{w}_1}{\mathrm{w}}\,\lambda + u\varepsilon.$$

Si les rotations infiniment petites autour des axes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ sont opposées et égales, la translation du système qui en résulte est infiniment petite

$$d\tau = dw_1 \mid (\varepsilon\lambda)$$

et sa vitesse de translation est

$$\bar{v}_0 = \frac{d\tau}{dt} = w_1 \mid (\varepsilon\lambda).$$

On voit facilement d'après le § 2′ comment on arriverait aux vitesses d'ordre supérieur.

§ 4. *Le système invariable* Σ *possède une rotation autour de l'axe* $\bar{\alpha}$ *de l'angle* w *et une translation* τ *parallèle à cet axe.*

Soit O un point fixe de l'axe $\bar{\alpha}$, son vecteur unité ε, $M_0 = O + \rho_0$ un point quelconque du système (fig. 3) avant le commencement du mouvement. Par suite de la rotation, le point M_0 vient dans la position $M = O + \rho_1$, et on a, d'après le § 2,

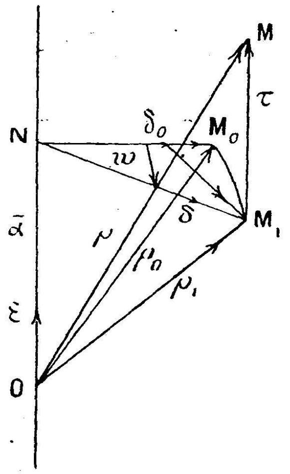

Fig. 3.

$$\rho_1 = (1 - \cos w)(\varepsilon \mid \rho_0) + \cos w \rho_0 + \sin w \mid (\varepsilon\rho_0);$$

par la translation du système, qui s'effectue ainsi, le point du système passant de l'endroit M_1 à l'endroit $M = M_1 + \tau = O + \rho$, de sorte que le radius vector d'un point du système quelconque, après que les deux mouvements ont eu lieu, est donné par l'équation

$$\rho = \rho_1 + \tau = (1 - \cos w)(\varepsilon \mid \rho_0)\,\varepsilon + \cos w \rho_0 + \sin w \mid (\varepsilon\rho_0) + \tau.$$

Cette équation nous enseigne que l'ordre de la suite de rotation et de translation est arbitraire, et aussi que les deux mouvements peuvent se faire en même temps.

Chaque point du système se meut sur un cylindre circulaire l'axe de celui-ci coïncidant avec l'axe de rotation, la longueur du demi-diamètre de ce cylindre est $h = \sqrt{(\varepsilon\rho_0)^2}$.

§ 4′. Si l'angle de rotation et la translation sont infiniment petits égaux à dw et à $d\tau = du\varepsilon$, alors le radius vector d'un point quelconque du système, après les deux mouvements, est

$$\rho = \rho_0 + dw \mid (\varepsilon\rho_0) + du\varepsilon.$$

L'élément de la trajectoire décrite par ce point, dans l'élément du temps, *dt* est

$$d\rho = \rho - \rho_0 = dw \,|\, (\varepsilon\rho_0) + du\varepsilon\,;$$

sa vitesse est donc

$$\bar{v} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{dw}{dt}\Big|(\varepsilon\rho) + \frac{du}{dt}\,\varepsilon$$

ou

$$\bar{v} = \mathrm{w}\,|\,(\varepsilon\rho_0) + u_0\varepsilon, \qquad u_0 = \frac{du}{dt},$$

et, à l'égard du § 2',

$$\bar{v} = \mathrm{w}\,|\,(\varepsilon\delta_0) + u_0\varepsilon.$$

Puisque alors $(\bar{v} \mid \delta) = 0$, la vitesse de chaque point du système est donc normale à la perpendiculaire qui tombe de lui sur l'axe de rotation.

On conclut de la même équation

$$(\bar{v}\,|\,\varepsilon) = u_0, \qquad (\varepsilon\,|\,\bar{v})\,\varepsilon = u_0\varepsilon,$$

les projections des vitesses des points du système sur la direction de l'axe de rotation $\bar{\alpha}$ sont égales l'une à l'autre et égales à la vitesse de translation parallèle à $\bar{\alpha}$.

De plus, nous avons

$$(\varepsilon\bar{v}) = \mathrm{w}\,[\varepsilon\,|\,(\varepsilon\delta_0)], \qquad (\varepsilon\bar{v})^2_{\cdot} = \mathrm{w}^2\,(\varepsilon\delta_0)^2_{\cdot} = \mathrm{w}^2h^2,$$

de sorte que nous obtenons pour l'angle b, que forment la vitesse $\bar{v}$ avec la direction de l'axe $\bar{\alpha}$,

$$\operatorname{tang} \mathrm{b} = \frac{\sqrt{(\varepsilon\bar{v})^2_{\cdot}}}{\varepsilon\,|\,v} = \frac{\mathrm{w}}{u_0}\,h.$$

La grandeur de la vitesse $\bar{v}$ résulte de la même équation par sa quadrature intérieure

$$v = \sqrt{\mathrm{w}^2h^2 + u^2_0}.$$

Il n'y a pas de point du système sans vitesse, car la vitesse $\bar{u}_0$ est commune à tous les points du système.

De $\delta_0 = 0$ résulte $-v = u_0\varepsilon$, tous les points de système sur l'axe $\bar{\alpha}$ se meuvent donc avec la vitesse $\bar{u}_0$.

La différentiation successive de l'équation de la vitesse par rapport au temps conduit aux vitesses d'ordre supérieur du point du système, c'est son accélération à l'égard du § 2'

$$\overline{\varphi} = \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\mathrm{w}^2\delta_0 + \mathrm{w}'|(\varepsilon\delta_0) + u'_0\varepsilon.$$

§ 5. *Le système Σ tourne autour d'un axe $\overline{\alpha}$ de l'angle* w *et il possède une translation τ inclinée sur cet axe.*

Soit le point O sur l'axe de rotation $\overline{\alpha}$ le pôle de coordonnées, $M_0 = O + \rho_0$ un point de système quelconque avant le commencement du mouvement. Par suite de la rotation et de la translation, le point M_0 prend la position $M = O + \rho$ (fig. 4) dans l'espace.

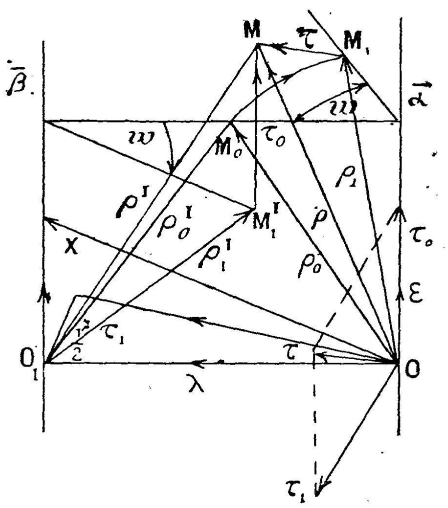

Fig. 4.

On a évidemment

$$\rho = (1-\cos w)(\varepsilon|\rho_0)\varepsilon + \cos w\rho_0 + \sin|(\varepsilon\rho_0) + \tau,$$

l'ordre de la suite de rotation et de translation est échangeable, les deux mouvements peuvent avoir lieu simultanément.

L'équation d'une droite du système avant le commencement du mouvement étant

$$\rho_0 = \lambda + \varkappa\,\beta, \qquad \lambda|\varepsilon = 0,$$

son équation, après que la rotation et la translation ont eu lieu si nous substituons cette valeur de ρ_0 pour ρ dans l'équation, est alors

$$\rho = \varkappa\,(1-\cos w)\,(\varepsilon|\beta)\,\varepsilon + \cos w\,(\lambda + \varkappa\beta) + \sin|[\varepsilon\lambda + \varkappa\,(\varepsilon\beta)] + \tau.$$

S'il faut que le système Σ possède une droite, dont les points se déplacent autour du vecteur τ_0, alors il faut pour cette rangée de points que l'on ait la condition.

$$\varkappa\,(1-\cos w)\,(\varepsilon|\beta)\,\varepsilon + \cos w\,(\lambda + \varkappa\beta) + \sin w|[\varepsilon\lambda + \varkappa\,(\varepsilon\beta)]$$
$$+\,\tau = \lambda + \varkappa\beta + \tau_0,$$

ou

$$\varkappa\left\{(1-\cos w)\,[(\varepsilon|\beta)\,\varepsilon - \beta] + \sin w|(\varepsilon\beta)\right\} + (\cos w - 1)\,\lambda$$
$$+ \sin w|(\varepsilon\lambda) = \tau_0 - \tau.$$

Parce que $(\tau_0 - \tau)$ seulement peut être un vecteur invariable, il faut donc pour une telle droite du système

$$(1 - \cos w)\,[(\varepsilon|\beta)\,\varepsilon - \beta] + \sin w\,|(\varepsilon\beta) = 0,$$
$$(1 - \cos w)\,\lambda - \sin w\,|(\varepsilon\lambda) + (\tau_0 - \tau) = 0.$$

De la première de ces équations résulte, s'il elle est exacte,

$$(\varepsilon|\beta)\,\varepsilon - \beta = 0, \qquad (\varepsilon\beta) = 0,$$

et, puisque de la première de ces relations résulte la seconde, il faut que β soit parallèle à ε, soit la droite cherchée parallèle à l'axe $\overline{\alpha}$, de sorte que d'abord l'équation de cette droite est

$$\chi = \lambda + x\varepsilon, \qquad \varepsilon|\lambda = 0.$$

De la seconde condition suit, par multiplication avec $|\varepsilon$,

$$(\tau_0 - \tau)\,|\varepsilon = 0, \qquad \tau_0|\varepsilon = \tau|\varepsilon,$$

c'est-à-dire la translation des points de cette droite est égale à la projection de la translation donnée sur sa direction, c'est-à-dire la direction de l'axe $\overline{\alpha}$.

Maintenant il faut encore déterminer la distance du vecteur $\lambda = \overline{OO_1}$ de la droite à l'axe de rotation $\overline{\alpha}$.

Prenons

$$\tau - \tau_0 = \tau_1, \qquad \tau_1|\varepsilon = 0,$$

alors il faut que

$$(1 - \cos w)\,\lambda - \sin|(\varepsilon\lambda) = \tau_1 = (\varepsilon\tau)\,|\varepsilon,$$

la multiplication de cette équation avec ε donne

$$(1 - \cos w)\,(\varepsilon\lambda) - \sin w\varepsilon|(\varepsilon\lambda) = (\varepsilon\tau_1) = (\varepsilon\tau),$$

de sorte que

$$(1 - \cos w)\,|(\varepsilon\lambda) + \sin w\lambda = |(\varepsilon\tau),$$

on a donc

$$|(\varepsilon\lambda) = \frac{|(\varepsilon\tau) - \sin w\lambda}{1 - \cos w},$$

et par conséquent

$$(1 - \cos w)\,\lambda - \frac{\sin w}{1 - \cos w}\,[|(\varepsilon\tau) - \sin w\lambda] = (\varepsilon\tau)\,|\varepsilon,$$

d'où il suit

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{ \text{cotang}\ \frac{1}{2}w|(\varepsilon\tau) + (\varepsilon\tau)|\varepsilon \right\},$$

et conséquemment l'équation de la droite du système qui autour du vecteur τ_0 se déplace en elle-même est

$$\chi = \frac{1}{2}\left\{ \text{cotang}\ \frac{1}{2}w|(\varepsilon\tau) + (\varepsilon\tau)|\varepsilon \right\} + \varkappa\varepsilon.$$

Pour la distance de cette droite à l'axe nous obtenons

$$l^2 = \lambda^2_- = \frac{1}{4}\left\{ 1 + \text{cotang}^2 \frac{1}{2} w \right\}(\varepsilon\tau)^2_- = \frac{1}{4\sin^2 \frac{1}{2} w}(\varepsilon\tau)^2_-,$$

$$l = c\,\frac{\sin(\varepsilon,\tau)}{2\sin \frac{1}{2} w}, \qquad c = \sqrt{\tau^2_-}$$

Si nous faisons tourner maintenant le système Σ autour de cette droite comme axe d'un angle w_1 et donnons en même temps au système la translation τ_0 parallèle audit axe, alors en posant $M_0 = O_1 + \rho^{I}_0$, et désignant par $M^{I} = O_1 + \rho^{I}$, en appelant M^{I} l'endroit de M_0 après les deux mouvements, on a

$$\rho^{I} = (1 - \cos w_1)(\varepsilon|\rho^{I}_0)\varepsilon + \cos w_1 \rho^{I}_0 + \sin w_1|(\varepsilon\rho^{I}_0) + \tau_0,$$

et avec O comme pôle des coordonnées il vient en mettant $\overline{OM} = \rho_I = \rho^{I} - \lambda$, $\rho^{I}_0 = \rho_0 - \lambda$,

$$\rho_I = (1 - \cos w_1)[(\varepsilon|\rho_0)\varepsilon - \lambda] + \cos w_1 \rho_0 + \sin w_1|(\varepsilon\rho_0 - \varepsilon\lambda) + \tau_0.$$

Si nous voulons que par le second mouvement le système passe à la même position comme par le premier mouvement, alors il faut que l'on ait $M^{I} = M$, $\rho_I = \rho$, à cause des équations pour ρ et ρ_I, si nous rappelons la valeur ci-dessus $(\tau - \tau_0)$, il vient

$$(\cos w - \cos w_1)\left\{(\varepsilon|\rho_0)\varepsilon - \rho_0 + \lambda\right\} - (\sin w - \sin w_1)|\left\{\varepsilon(\rho_0 - \lambda)\right\} = 0,$$

équation qui ne saurait être satisfaite qu'avec

$$\cos w - \cos w_1 = 0, \qquad \sin w - \sin w_1 = 0,$$

de sorte que

$$w_1 = w, \qquad \text{ou} \qquad w_1 = -(2\pi - w),$$

doit être l'angle de la rotation autour du nouvel axe égal à l'angle donné, ou égal à son complément pris négativement à 2π.

Faisons tourner à présent le système Σ autour du second axe de l'angle w, et effectuons la translation τ_0, alors le radius vector d'un point quelconque du système après le changement de lieu est

$$\rho^I = (I - \cos w)\,(\varepsilon|\rho^I_0)\,\varepsilon + \cos w \rho^I_0 + \sin|(\varepsilon\rho^I_0) + \tau_0,$$

d'où il suit avec $\rho^I = \rho_I - \lambda$, $\rho^I_0 = \rho_0 - \lambda$,

$$\rho_I = (1 - \cos w)\,(\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon + \cos w \rho_0 + \sin w|(\varepsilon\rho_0) + \tau = \rho.$$

On voit que le second mouvement est équivalent au premier.

La rotation autour d'un axe $\overline{\alpha}$ d'un angle w et la translation τ inclinée sur cet axe d'un système invariable Σ sont indépendantes de l'ordre et équivalentes à une rotation autour d'un certain axe parallèle à l'axe $\overline{\alpha}$ du même angle et à une translation parallèle à cet axe, égale à la projection de la translation donnée sur la direction des axes.

Que le système Σ tourne autour de l'axe $\overline{\alpha}$ de l'angle w et qu'il subisse la translation τ, alors le radius vector d'un point du système quelconque, après que les deux mouvements ont eu lieu, est

$$\rho = (1 - \cos w)\,(\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon + \cos w \rho_0 + \sin w|(\varepsilon\rho_0) + \tau.$$

Que le même système tourne de plus autour de l'axe $\overline{\beta}$, parallèle à $\overline{\alpha}$, de l'angle w_1 et qu'il subisse la translation τ^1, alors le radius vector d'un point quelconque du système, après que les deux mouvements ont eu lieu, si le point O_1 de $\overline{\beta}$ est point de relation est

$$\rho_I = (1 - \cos w_1)\,(\varepsilon|\rho^I_0)\,\varepsilon + \cos w_1 \rho^I_0 + \sin w_1|(\varepsilon\rho^I_0) + \tau^I.$$

Posons $\overline{OO_1} = \lambda$, $\lambda|\varepsilon = 0$, alors $\rho^I_0 = \rho_0 - \lambda$, $\rho_I = \rho^I - \lambda$, et avec ces valeurs on arrive à la dernière équation

$$\rho^I = (1 - \cos w_1)\,(\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon + \cos w_1\,(\rho_0 - \lambda) + \sin w_1|[\varepsilon\,(\rho_0 - \lambda)] + \tau^I.$$

S'il faut que le second mouvement soit équivalent au premier mouvement, il faut avoir $\rho^I = \rho$, ou

$$\begin{aligned}&(\cos w - \cos w_1)\,\left\{(\varepsilon|\rho_0)\,\varepsilon - \rho_0\right\} - (\sin w - \sin w_1)|(\varepsilon\rho_0)\\ &+ (1 - \cos w_1)\,\lambda - \sin w_1|(\varepsilon\lambda) + \tau^I - \tau = 0,\end{aligned}$$

par conséquent on aura

$$w_1 = w,$$
$$\tau^{\mathrm{I}} = \tau + (\cos w - 1)\,\lambda + \sin w \,|\, (\varepsilon\lambda),$$

et la dernière relation entraînera

$$\tau^{\mathrm{I}} | \varepsilon = \tau | \varepsilon.$$

Si un système invariable Σ subit une rotation autour d'un axe $\overline{\alpha}$ et une translation, son mouvement est équivalent à une rotation de même angle autour d'un axe quelconque $\overline{\beta}$, parallèle à l'axe donné et à une translation. Cette dernière translation est dépendante de la distance réciproque des deux axes, sa projection sur la direction des axes est égale à la projection de la translation donnée sur cette direction.

§ 5'. *A présent, supposons que le système Σ subisse une rotation infiniment petite de l'angle dw et une translation infiniment petite* $d\tau$.

Il s'ensuit par ce qui précède que nous obtenons immédiatement, si nous mettons dans les résultats ci-dessus, à la place de w et τ resp. dw et $d\tau$, pour le radius vector d'un point quelconque du système après les deux mouvements

$$\rho = \rho_0 + dw \,|\, (\varepsilon\rho_0) + d\tau;$$

de plus l'équation de l'axe autour duquel le système fait un mouvement de vis infiniment petit est

$$\chi = \frac{1}{dw} \,|\, (\varepsilon d\tau) + x\varepsilon;$$

sa distance du point O est

$$\lambda = \frac{1}{dw} \,|\, (\varepsilon d\tau), \qquad l = \frac{\sin(\varepsilon, d\tau)}{dw}\, du, \qquad du = \sqrt{d\tau^2},$$

la translation parallèle à l'axe $\overline{\alpha}$ est

$$d\tau_0 = d\tau + dw \,|\, (\varepsilon\lambda) = d\tau - (\varepsilon d\tau) \,|\, \varepsilon,$$
$$d\tau_0 | \varepsilon = d\tau | \varepsilon, \qquad d\tau_0 = (d\tau | \varepsilon)\, \varepsilon.$$

L'élément de la trajectoire d'un point du système parcouru dans l'élément de temps dt est

$$d\rho = \rho - \rho_0 = dw \,|\, (\varepsilon\rho_0) + d\tau,$$

ou

$$d\rho = \rho^{\mathrm{I}} - \rho^{\mathrm{I}}_0 = dw \,|\, (\varepsilon\rho^{\mathrm{I}}) + d\tau_0,$$

par conséquent la vitesse de ce point est

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dw}{dt} \,|\, (\varepsilon\rho_0) + \frac{d\tau}{dt} = \frac{dw}{dt} \,|\, (\varepsilon\rho^{\mathrm{I}}_0) + \frac{d\tau_0}{dt},$$

ou

$$\bar{v} = \mathrm{w} \,|\, (\varepsilon\rho_0) + \bar{u} = \mathrm{w} \,|\, (\varepsilon\rho^{\mathrm{I}}_0) + u_0\varepsilon.$$

L'équation de l'axe de vis peut s'écrire

$$\chi = \frac{1}{\frac{dw}{dt}} \left| \left(\varepsilon \frac{d\tau}{dt}\right) + \varkappa\varepsilon \right.$$

ou

$$\chi = \frac{1}{\mathrm{w}} \,|\, (\varepsilon\bar{u}) + \varkappa\varepsilon,$$

il en résulte

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{w}} \,|\, (\varepsilon\bar{u}), \qquad l = \frac{u}{\mathrm{w}} \sin(\varepsilon, \bar{u}),$$

de sorte qu'il y a moyen de construire facilement l'axe du mouvement infiniment petit de la vis.

Pour la vitesse parallèle à cet axe nous obtenons

$$\bar{u}_0 = \frac{d\tau_0}{dt} = (\bar{u} \,|\, \varepsilon)\,\varepsilon, \qquad u_0 = u \cos(\varepsilon, \bar{u}).$$

Si le système Σ tourne autour de l'axe duquel nous venons de parler de l'angle dw et s'il possède la translation $d\tau_0$, alors la vitesse d'un point du système quelconque est

$$\bar{v} = \mathrm{w} \,|\, [\varepsilon\,(\rho_0 - \lambda)] + u_0\varepsilon,$$

l'équation du premier axe avec O_1 comme point de relation est

$$\rho^{\mathrm{I}}_0 = -\lambda + \varkappa\varepsilon,$$

par conséquent les vitesses des points de la droite du système qui coïncide avec cet axe (en mettant pour $\bar{v}$ dans l'équation $\rho_0 - \lambda = \rho^{\mathrm{I}}_0$) sont

$$\bar{v} = -\mathrm{w} \,|\, (\varepsilon\lambda) + u_0\varepsilon,$$

mais on a à cause de l'équation relative à λ,

$$\mathrm{w} \,|\, (\varepsilon\lambda) = -(\varepsilon \bar{u}) \,|\, \varepsilon,$$

par conséquent

$$\bar{v} = (\varepsilon \bar{u}) \,|\, \varepsilon + u_0 \varepsilon = \bar{u},$$

de sorte que, par suite du second mouvement du mouvement infiniment petit de la vis du système, les points du système sur le premier axe ne possèdent que la vitesse de translation $\bar{u}$, comme il faut que cela soit.

Avec cela le mouvement du système est ramené à son mouvement du paragraphe précédent.

Si le système Σ tourne autour de l'axe $\bar{\alpha}$ de l'angle dw et s'il a encore la translation autour du vecteur $d\tau$, on a alors

$$\rho = \rho_0 + dw \,|\, (\varepsilon\rho_0) + d\tau.$$

Si l'on veut que le même résultat soit obtenu par sa rotation autour d'un axe $\bar{\beta}$ parallèle à celui de $\bar{\alpha}$, lesquels axes possèdent la distance réciproque λ, et une translation $d\tau_{\mathrm{I}}$, alors il faut que, selon ce qui a été dit à la fin du § 5, l'angle de rotation autour de l'axe $\bar{\beta}$ soit égal à dw ; la translation

$$d\tau_1 = d\tau + dw \,|\, (\varepsilon\lambda),$$

la vitesse angulaire égale la précédente et la vitesse de la translation

$$\bar{v}_1 = \bar{u} + \mathrm{w} \,|\, (\varepsilon\lambda).$$

On peut comparer ce développement avec les articles correspondants d'Appell et Schell sur la cinématique théorique ; on verra alors les avantages qu'offre le calcul géométrique sur les développements usuels.

FERDINAND KRAFT. (ZÜRICH.)