W. R. Hamilton. — Elements of quaternions, 2e edition, edited by C. J. Joly; vol. i, 1899; XXXIII-583 p., 75 fig.; vol. II, 1901, LIV-502 p., 14 fig.; in-40; prix 42 fr.; Londres, Longmans, Green and C°.

Autor(en): **Laisant, C.-A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

L'analyse d'un ouvrage aussi concis et qui est lui-même une analyse d'autres ouvrages n'est guère possible. L'auteur recherche d'abord comment on peut reconnaitre qu'un point du cercle de convergence est singulier et que ce cercle est une coupure essentielle (dans ce dernier cas, la question du prolongement analytique de la fonction n'existe pas). Il montre comment un changement de variables permet d'étendre le domaine où l'on peut suivre la marche de la fonction ; il étudie les expressions diverses de la même fonction qui permettent de sortir du cercle de convergence et, après avoir rappelé les séries asymptotiques de M. Poincaré, il nous fait comprendre le rôle important que jouent les séries divergentes sommables de M. Borel, les fractions continues de Stieltjes et les séries de polynômes valables dans les *étoiles* de M. Mittag-Leffler. Le problème a enfin acquis toute son ampleur lorsqu'on a ramené l'étude d'une série représentant une fonction à celle d'une seconde série représentant une autre fonction ; il y a évidemment bien des voies ouvertes aux chercheurs dans cette direction. C'est ainsi que la connaissance des points singuliers de deux séries de Maclaurin entraîne celle des singularités possibles pour la série qui a comme coefficients les produits de deux coefficients de même rang des séries données. Mais, malgré les travaux de M. Hurwitz, de M. Pincherle et de M. Hadamard lui-même, les résultats obtenus sont encore peu nombreux.

Nous sommes loin d'avoir énuméré tous les sujets abordés ou indiqués par M. Hadamard qui termine en montrant l'intérêt de ces recherches tant pour la résolution des équations algébriques ou transcendantes que pour l'intégration des équations différentielles. Nous en avons assez dit pour faire comprendre le plaisir que nous avons eu à lire ces cent pages.

Lucien Lévy (Paris).

W. R. Hamilton. — **Elements of quaternions**, 2e édition, edited by C. J. Joly; vol. I, 1899; XXXIII-583 p., 75 fig.; vol. II, 1901, LIV-502 p., 14 fig.; in-4°; prix 42 fr.; Londres, Longmans, Green and Co.

Les *Elements of quaternions* constituent l'œuvre capitale du grand géomètre Hamilton. Ils furent publiés en 1866, après la mort de l'auteur (survenue en 1865) par les soins de son fils, William Edwin Hamilton, en un volume gr. in-8°; l'ouvrage, heureusement, était, on peut le dire, entièrement achevé ; c'est à peine si quelques additions furent nécessaires. Depuis lors, la méthode des quaternions a pris une extension considérable, des travaux ont paru sur ce sujet dans presque tous les pays du monde, et le volume des *Elements* était épuisé. C'est dans ces conditions que M. C. J. Joly a eu l'heureuse inspiration d'en publier une édition nouvelle. Il faut d'autant plus s'en réjouir qu'il s'agit d'une exposition magistrale de la doctrine des quaternions, et que, malgré l'élévation des idées, qui entraînent sur certains points des difficultés réelles, il règne d'un bout à l'autre de ce livre une admirable clarté. Quiconque voudra véritablement s'assimiler le calcul des quaternions, après en avoir trouvé les premières notions dans l'un des livres plus récents publiés depuis, devra toujours se reporter à l'œuvre originale de l'inventeur, à cet exposé didactique écrit à la veille de sa mort, et résumant ses longues recherches en un tableau définitif.

Dans la forme, cette édition nouvelle diffère beaucoup de l'ancienne ; il y a deux volumes au lieu d'un seul; le format a été agrandi (c'est l'in-4° au lieu de l'in-8°) ; le texte est moins compact; et, disons-le tout de suite, l'impression atteint une perfection qui fait le plus grand honneur aux éditeurs, MM. Longmans, Green et Cie, et aux imprimeurs, MM. Ponsomby et Weldrick. Cependant, comme M. Joly a soin de nous en prévenir dans la préface qu'il a écrite, le texte original a été conservé avec le plus grand soin, sauf la correction d'un très petit nombre d'erreurs flagrantes. Il a ajouté des notes [entres crochets] lorsqu'il les a jugées utiles; le nombre des références a été accru, et un index alphabétique fort précieux a été introduit à la fin de chaque volume. La table des matières a été amplifiée, bien qu'elle fût admirablement détaillée déjà par Hamilton; et elle présente une analyse de chaque article; le but poursuivi est d'aider le lecteur autant que possible dans l'étude du texte et dans la récapitulation des notions acquises. Enfin, on s'est encore conformé à l'indication de Hamilton sur un autre point; il avait indiqué le plan d'une étude réduite, s'étendant à environ 200 pages, pour les lecteurs désireux de prendre seulement un premier aperçu, assez complet cependant, de la méthode; ce plan, légèrement étendu, est indiqué très clairement par un tableau placé à la suite de la table des matières, et sera notamment précieux pour les étudiants qui veulent chercher surtout dans les quaternions ce qui peut leur être utile pour les applications aux sciences physiques.

Mentionnons enfin un important appendice composé de plusieurs notes importantes, et sur lequel nous reviendrons tout à l'heure.

Avant de présenter un tableau sommaire des matières contenues dans cet important ouvrage, nous croyons devoir rappeler que la méthode des quaternions est devenue aujourd'hui d'un usage de plus en plus fréquent au point de vue des applications. En Géométrie, en Mécanique, en Physique mathématique, elle rend, conjointement avec la méthode de Grassmann, les plus grands services, donne une vision plus nette des choses, rapproche le symbole de l'objet et abrège l'écriture. Hoüel, qui en avait reconnu les grands avantages et qui a fait tant d'efforts pour la propager, avait proposé un système de notations plus judicieux et plus simple, à notre avis, que celui de l'inventeur. Naturellement, dans l'ouvrage que nous analysons ici, les notations anglaises ont été conservées, et jusqu'à présent elles restent les plus répandues. D'ailleurs, on doit reconnaître qu'il n'y a là aucune difficulté sérieuse, même lorsqu'on partage, ce qui est mon cas, la façon de voir de Hoüel.

L'ouvrage se compose de trois livres, subdivisés en chapitres, les chapitres étant eux-mêmes sous-divisés en sections, plus les notes de M. Joly, qui constituent l'appendice. Dans le premier volume, on trouve les deux premiers livres, et les chapitres I et II du troisième. Nous donnons ci-après la substance de l'ouvrage, en suivant la table des matières. Elle est tellement bien faite, si détaillée, il faut le répéter, qu'en la publiant à part on aurait un véritable résumé du calcul des quaternions, présentant d'une façon remarquablement ordonnée toute la substance de cette doctrine et des nombreuses applications qui figurent dans l'ouvrage.

Le livre I traite des vecteurs, en dehors de leurs relations avec les angles ou avec les rotations. Il se divise en trois chapitres : ch. I, principes fondamentaux relatifs aux vecteurs; ch. II, applications aux points et aux droites dans un plan donné; ch. III, application des vecteurs à l'espace. On rencontre là, en dehors de la définition des vecteurs et de l'égalité de deux vecteurs, ce qui a trait à l'addition et à la soustraction des vecteurs, aux coefficients numériques des vecteurs, aux équations linéaires entre vecteurs de même origine, aux propriétés géométriques et à la représentution des figures planes au moyen d'équations vectorielles. Puis, les équations entre vecteurs non situés dans un même plan, conduisant à l'étude des figures de l'espace, aux barycentres, et à la considération des différentielles de vecteurs.

Arrivons au livre II, des quaternions, considérés comme quotients de vecteurs et comme comprenant les relations angulaires. Il comprend également trois chapitres : ch. I, principes fondamentaux relatifs aux quotients de vecteurs; ch. II, sur les quaternions coplanaires, ou quotients de vecteurs dans un plan; puissances, racines et logarithmes de quaternions; ch. III, quaternions diplanaires, ou quotients de vecteurs dans l'espace; principe associatif de la multiplication de tels quaternions. C'est là, on peut le dire, la partie fondamentale de la doctrine des quaternions ; la notion du quaternion, sous la forme du rapport de deux vecteurs, se présente d'une façon toute naturelle et véritablement philosophique. De là résultent les opérations qui donnent naissance aux quaternions réciproques, conjugués, opposés, aux verseurs, tenseurs, etc., à l'assimilation symbolique d'un vecteur avec un quaternion rectangle, et à diverses formules importantes. Les applications au plan sont très utiles comme initiation; mais si la méthode devait borner là sa puissance, elle serait avantageusement remplacée par celle des équipollences, qui n'exige aucune règle algébrique spéciale. C'est dans les faits de l'espace que les quaternions interviennent de façon si heureuse ; tout dérive de la propriété associative (et non commutative) de la multiplication, qui est ici admirablement exposée, et qui du reste n'est que la traduction d'une vérité géométrique.

Le livre III est consacré en très grande partie aux applications; il a pour titre : quaternions, considérés comme produits ou puissances de vecteurs; quelques applications des quaternions. Voici les chapitres qu'on y trouve : ch. I, interprétation d'un produit de vecteurs, ou puissance d'un vecteur comme quaternion; ch. II, différentielles et développements de fonctions de quaternions; quelques applications des quaternions à des questions de Géométrie et de Physique; ch. III, quelques applications additionnelles des quaternions, et quelques remarques finales. Cette énumération suffit à faire entrevoir les sujets qui se trouvent traités dans le livre III ; il faut cependant le regarder de près, pour avoir une idée de la richesse et de la variété des applications, qui remplissent à peu près tout le deuxième volume ; elles portent sur les sujets les plus divers : Géométrie, Mécanique, Électricité, Astronomie, etc. ; et, malgré une absence de classification qu'on pourrait reprocher à l'auteur si son but n'avait pas été simplement d'illustrer sa méthode et de donner une indication d'ensemble, elles montrent bien à tout esprit impartial et non prévenu l'étendue et la portée de cette analyse nouvelle.

Nous avons déjà dit que la nouveauté essentielle de cette deuxième édition est due essentiellement à l'appendice de M. Ch.-J. Joly, qui ne comprend pas moins de 115 pages. Les notes qu'on trouve dans cet appendice sont au nombre de treize, et portent sur les sujets suivants : déterminants de quaternions ; propriétés diverses de deux fonctions vectorielles linéaires ; la fonction de déformation ; sur la spécification des fonctions linéaires vectorielles ; invariants des fonctions linéaires vectorielles ; sur le système des fonctions $\varphi + i\theta$; sur la transformation générale linéaire dans l'espace ; sur la théorie des vis; sur les déplacements finis; sur l'étude cinématique des courbes; sur l'étude cinématique des surfaces; sur les systèmes de rayons; sur l'opérateur Δ de Hamilton.

Telles sont les matières contenues dans cette deuxième édition de l'ouvrage capital de Hamilton. Cette publication ne peut manquer de provoquer l'attention des mathématiciens, et surtout des jeunes, sur cette remarquable méthode des quaternions; et elle vaudra à celui qui l'a entreprise la reconnaissance du monde savant pour le travail si considérable qu'il s'est imposé.

Juste au moment où nous terminons ce compte rendu, nous venons de recevoir une brochure donnant, au mois de mars 1901, l'état de l'*International association for promoting the study of quaternions and allied systemes of mathematics*. Nous y constatons avec plaisir que M. Ch.-J. Joly en est président pour les années 1901 et 1902. Nul assurément ne méritait plus que lui cette distinction, et chacun y applaudira, surtout après avoir édudié l'édition nouvelle des *Eléments* dont nous venons de parler.

C.-A. LAISANT.

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ, Ὀλοκληρωτικὸς λογισμός. Τόμος πρ ῶτος, 1901. Εν Ἀθήναις. Σελ. 488. Jean N. Hatzidakis, Calcul Integral. Volume I, 488 pages; Athènes, 1901.

Ce livre, qui vient de paraître, est le premier traité sur le calcul intégral en langue grecque. Il contient la matière que l'auteur enseigne à l'Université d'Athènes sur les Quadratures et les Intégrales définies. Une seconde partie, qui paraîtra plus tard, traitera de la Théorie des Équations Différentielles et du Calcul des Variations, dans l'étendue que leur donne l'auteur à ses cours de l'Université, étendue plus que moyenne.

Le premier « Livre» du présent volume (page 1-148) contient les quadratures dans l'étendue ordinaire des Traités : Généralités, Intégration des expressions rationnelles, des Expressions algébriques, *quelques mots* sur les Intégrales elliptiques, hyperelliptiques et abéliennes, et enfin l'Intégration des fonctions transcendantes. L'auteur y considère aussi un cas nouveau, où, dans l'intégration de l'expression rationnelle $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, l'on peut éviter la décomposition usuelle en facteurs linéaires. [C'est le cas où l'intégrale est de la forme : $C.l\left(\frac{\Sigma(x)}{\Phi(x)}\right)$ (voir « 'Ἀθηνᾶ », Tome XI, p. 567); une traduction française de cet article paraîtra peut-être plus tard dans l' « Enseignement Mathématique »].

La deuxième partie du Livre, la plus étendue, contient la théorie des intégrales définies qui est exposée (surtout dans sa partie générale) très longuement et très minutieusement, comme dans aucun autre livre peut-être, l'auteur sachant par l'expérience que cette partie du Calcul, qui est une des plus fécondes de la science, est aussi une des plus difficiles à comprendre pour les commençants.

Le contenu de cette partie se résume ainsi : *Intégrales simples* (avec des chapitres sur les intégrales dont les limites ou la fonction intégrée deviennent infinies, différentiation et intégration des séries, etc.); *Intégrales doubles* [avec des chapitres sur leur transformation générale et sur les déterminants