SUR LE CALCUL DES QUATERNIONS

SUR LE CALCUL DES QUATERNIONS

Le calcul des quaternions, dont l'exposé ordinaire, tel qu'il a été donné par son inventeur Sir Rowan HAMILTON, a un caractère assez abstrait (1), peut être établi d'une manière simple, en partant de certaines relations bien connues (2) de vecteurs qui seront d'abord rappelées dans les paragraphes 1 à 5.

1. La somme des vecteurs A, B, C,..... ou somme géométrique possède les mêmes propriétés qu'une somme algébrique : elle est associative et commutative. En représentant par $\mathcal{A}$ la longueur de A, par $\mathcal{A}_1$ $\mathcal{A}_2$ $\mathcal{A}_3$ les longueurs de ses composantes parallèles à trois axes rectangulaires xyz, formant un système droit (ox vers l'est, oy vers le nord, oz vers le zénith), on aura

(1) $$A = \mathcal{A}_1 i + \mathcal{A}_2 j + \mathcal{A}_3 k$$

si i, j, k sont des vecteurs-unité dans les trois axes.

2. L'expression *scalaire*

(2) $$\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_3 \equiv \mathcal{A}\mathcal{B} \cos (AB)$$

formée des deux vecteurs A et B, est simplement désignée par AB et nommée *produit scalaire* ou *interne* de ces deux vecteurs. Cette définition nous fournit immédiatement :

(3) $$AB = BA$$

(4) $$AA \equiv A^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2 = \mathcal{A}^2$$

---

(1) P.-G. TAIT dans son *Traité élémentaire des Quaternions* (I, p. 66) appelle le raisonnement de Hamilton « presque métaphysique », et O. HEAVISIDE (*Electrical Papers*, vol. II, p. 528) trouve que *the quaternion (as)... fundamental idea... renders the establishment of the algebra of vectors without metaphysics a very difficult matter.*

(2) O. HEAVISIDE, *Electrical Papers*, vol. II, p. 528-533.

(5) $$AB + AC + \ldots\ldots = A(B + C + \ldots\ldots)$$

(6) $$(A + D)(B + C) = AB + AC + DB + DC$$

$AB = 0$ lorsque A est perpendiculaire à B ;

$$ii = jj = kk = 1; \qquad ij = jk = ki = 0.$$

Le produit scalaire est donc commutatif (3) et distributif (6) comme un produit ordinaire.

3. Le *vecteur*

(7) $$(\mathcal{A}_2 \mathcal{B}_3 - \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2)\, i + (\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_3)\, j + (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_1)\, k$$

formé de A et B est représenté par VAB et nommé *produit vectoriel* ou *externe* de ces deux vecteurs. Il est perpendiculaire à A, car son produit scalaire par A, formé d'après l'équation (2), est égal à zéro ; il est de même perpendiculaire à B, tandis que le carré de sa longueur, calculé d'après (4), devient :

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_2 \mathcal{B}_3 - \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2)^2 + (\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_3)^2 + (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_1)^2 \\ \equiv (\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2)(\mathcal{B}_1^2 + \mathcal{B}_2^2 + \mathcal{B}_3^2) - (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_3)^2 \\ \equiv \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 - \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 \cos^2(AB) \equiv \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 \sin^2(AB).\end{aligned}$$

La longueur elle-même est donc $\mathcal{A}\mathcal{B}\sin(AB)$, et quant à la direction, l'on voit facilement que A, B et VAB forment un système droit, car en prenant i et j au lieu de A et B, on trouve k pour le produit vectoriel. La définition donnée par (7) nous fournit maintenant les relations suivantes :

(8) $$VAB = -VBA$$

(9) $$VAA = 0$$

(10) $$VAB + VAC + \ldots\ldots = VA(B + C + \ldots\ldots)$$

(11) $$V(A + D)(B + C) = VAB + VAC + VDB + VDC$$

(12) $$Vij = k \qquad Vjk = i \qquad Vki = j$$

Le produit vectoriel est donc distributif comme un produit ordinaire (11) ; mais il n'est pas commutatif (8).

4. Le produit *scalaire* CVAB des deux vecteurs C et VAB est d'après (2) et (7)

$$\mathcal{C}_1 (\mathcal{A}_2 \mathcal{B}_3 - \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2) + \mathcal{C}_2 (\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_3) + \mathcal{C}_3 (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_1)$$

ou égal au déterminant

$$| \mathcal{C}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_3 | ;$$

il s'ensuit que

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{CVAB} = \mathrm{AVBC} = \mathrm{BVCA}.$$

Si les trois vecteurs sont dans un même plan — coplanaires — A peut s'écrire $m\mathrm{B} + n\mathrm{C}$ et l'on aura

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{AVBC} = (m\mathrm{B} + n\mathrm{C})\ \mathrm{VBC} = m\mathrm{BVBC} + n\mathrm{CVBC} = 0.$$

5. Le produit *vectoriel* VCVAB de C et VAB contient d'après (7) six termes. Nous n'en écrivons que deux :

$$\begin{aligned}[] [\mathcal{C}_2 (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_1) - \mathcal{C}_3 (\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_3)]\, i + [-]\, j + [-]\, k \\ \equiv [(\mathcal{B}_1 \mathcal{C}_1 + \mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2 + \mathcal{B}_3 \mathcal{C}_3)\, \mathcal{A}_1 - (\mathcal{A}_1 \mathcal{C}_1 + \mathcal{A}_2 \mathcal{C}_2 + \mathcal{A}_3 \mathcal{C}_3)\, \mathcal{B}_1]\, i \\ + [-]\, j + [-]\, k, \end{aligned}$$

Le premier, le troisième et le cinquième ensemble donnent

$$(\mathcal{B}_1 \mathcal{C}_1 + \mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2 + \mathcal{B}_3 \mathcal{C}_3)\, (\mathcal{A}_1 i + \mathcal{A}_2 j + \mathcal{A}_3 k)$$

ou

$$\mathrm{BC.A},$$

tandis que les trois autres fournissent

$$-(\mathcal{A}_1 \mathcal{C}_1 + \mathcal{A}_2 \mathcal{C}_2 + \mathcal{A}_3 \mathcal{C}_3)\, (\mathcal{B}_1 i + \mathcal{B}_2 j + \mathcal{B}_3 k)$$

ou

$$-\mathrm{AC.B}.$$

Il est donc

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{VCVAB} = \mathrm{A.BC} - \mathrm{B.CA}$$

et conséquemment

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{VCVAB} + \mathrm{VAVBC} + \mathrm{VBVCA} = 0.$$

6. *Quaternions.* — En supposant (fig. 1) que les deux vecteurs R et R′ aient la même longueur $\mathcal{R}$, et que A_1 soit un vecteur-unité perpendiculaire à leur plan, nous voyons (§ 3) que la longueur de $\mathrm{VA}_1\mathrm{R}$ aussi sera égale à $\mathcal{R}$, et comme R′ est la somme des vecteurs OP et OQ, nous aurons

$$\mathrm{R}' = \cos\theta.\mathrm{R} + \sin\theta.\mathrm{VA}_1\mathrm{R}$$

ce que nous écrirons encore

$$(\cos\theta + \sin\theta\ \mathrm{VA}_1)\,\mathrm{R}$$

ou

$$(\cos\theta + \sin\theta\,\overline{\mathrm{A}_1})\,\mathrm{R}.$$

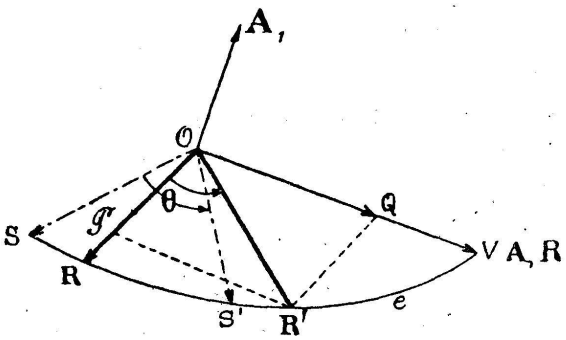

Fig. 1.

De la même manière l'on trouverait S' égal à

$$\cos\theta.\mathrm{S} + \sin\theta.\mathrm{VA}_1\mathrm{S}$$

ou

$$(\cos\theta + \sin\theta\,\overline{\mathrm{A}_1})\,\mathrm{S}.$$

Le multiplicateur

$$\cos\theta + \sin\theta\,\overline{\mathrm{A}_1}$$

change R en R' et S en S', c'est-à-dire il tourne *tout* vecteur dans le plan *e* ou dans un plan parallèle d'un angle θ autour du vecteur-unité A_1 dans le sens indiqué, sans en changer la longueur. Il est évident que l'opérateur

$$m(\cos\theta + \sin\theta\,\overline{\mathrm{A}_1})$$

fait, tout en tournant d'un angle θ, la longueur *m* fois plus grande. Cet opérateur-là est un quaternion *q* ;

$$\cos\theta + \sin\theta\,\overline{\mathrm{A}_1}$$

en est le « verseur » Uq ; *m* en est le « tenseur » Tq.

Réciproquement, comme

$$(\overline{a} + \overline{\mathrm{A}})\,\mathrm{R} \equiv (a + \mathcal{A}\mathrm{VA}_1)\,\mathrm{R} \equiv \sqrt{a^2 + \mathcal{A}^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+\mathcal{A}^2}} + \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{a^2+\mathcal{A}^2}}\overline{\mathrm{A}_1}\right]\mathrm{R}$$

(17) $$\equiv \sqrt{a^2 + \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_4^2}\,(\cos\theta + \sin\theta\,\overline{\mathrm{A}_1})\,\mathrm{R}$$

l'opérateur $a + \overline{\mathrm{A}}$ est un quaternion, dont le tenseur

$$\mathrm{T}q = \sqrt{a^2 + \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2}$$

et dont le verseur

$$\mathrm{U}q = \cos\theta + \sin\theta\,\overline{\mathrm{A}_1},$$

l'angle θ étant déterminé par

$$\cos\theta = a : \sqrt{a^2 + \mathcal{A}^2}$$

et

$$\sin\theta = \mathcal{A} : \sqrt{a^2 + \mathcal{A}^2}.$$

La « partie scalaire » $\mathrm{S}q$ en est a, la « partie vectorielle[1] » $\mathrm{V}q$ en est $\overline{\mathrm{A}}$. Il est entièrement déterminé par les quatre quantités a, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$; c'est de là que vient son nom.

L'égalité de deux quaternions implique aussi bien celle de leurs parties scalaires que celle de leurs parties vectorielles et réciproquement.

7. Le multiplicateur

$$m\left[\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\,\overline{\mathrm{A}_1}\right]$$

ou

$$m\left[\cos\theta - \sin\theta\,\overline{\mathrm{A}_1}\right]$$

qui tourne d'un angle $-\theta$ est appelé le quaternion conjugué $\mathrm{K}q$ de

$$m\left[\cos\theta + \sin\theta\,\overline{\mathrm{A}_1}\right].$$

tandis que

$$\frac{1}{m}\left[\cos\theta - \sin\theta\,\overline{\mathrm{A}_1}\right]$$

en est le quaternion inverse q^{-1}. Il est évident que les deux opérations q et $\mathrm{K}q$ effectuées sur le vecteur R n'auront d'autre résultat que d'en faire la longueur m^2 fois plus grande :

$$\mathrm{K}q.q = m^2 = q.\mathrm{K}q$$

[1] Le V employé ici pour la partie vectorielle d'un quaternion est différent de celui employé pour le produit vectoriel de deux vecteurs.

tandis que les opérations q et q^{-1} effectuées successivement ne changeront rien au vecteur :

$$q^{-1}.q = 1 = q.q^{-1}.$$

Il existe en outre la relation

$$Kq = (Tq)^2\, q^{-1}.$$

8. *Addition.* — Les deux quaternions

$$p \equiv m_1 \left(\cos\theta + \sin\theta\, \overline{A_1}\right) \equiv a + \overline{A}$$

et

$$q = m_2 \left(\cos\varphi + \sin\varphi\, \overline{B_1}\right) \equiv b + \overline{B}$$

peuvent agir sur la droite commune à leurs plans, et la figure 2 fait voir que $pR = R'$ et $qR = R''$, donc

$$pR + qR \equiv (p+q)\,R = R' + R'' = R''' = (q+p)\,R.$$

Nous en concluons d'abord, que $p+q = q+p$ et ensuite, que

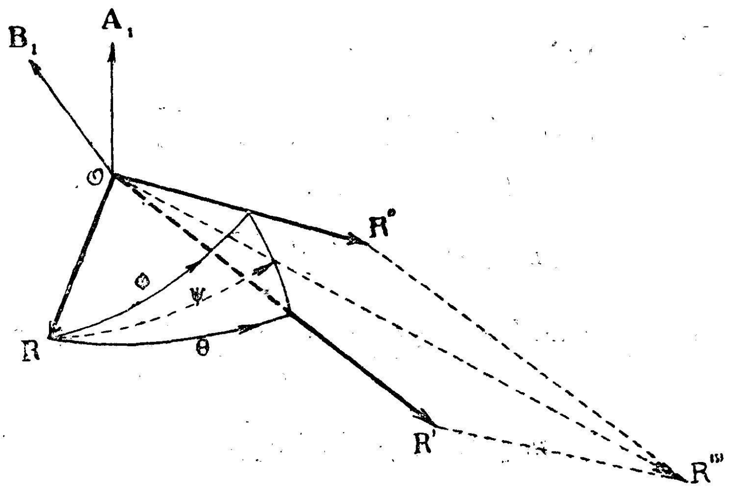

Fig. 2.

cette somme est équivalente à un nouveau quaternion, tournant d'un angle ψ *tout* vecteur dans le plan (RR'''). A ce nouveau quaternion peut être ajouté un troisième

$$r \equiv c + \overline{C};$$

l'ensemble sera alors équivalent à un quatrième quaternion

$$a + b + c + \overline{A + B + C},$$

et comme

$$p + q + r = r + q + p = (p + q) + r = p + (q + r)$$

l'addition des quaternions est aussi bien commutative qu'associative.

9. *Multiplication.* — Pour faire coïncider (fig. 3) le vecteur R

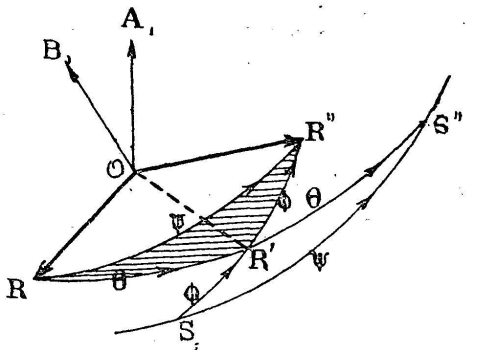

Fig. 3.

avec R″, nous pouvons d'abord lui appliquer le multiplicateur ou verseur

$$\cos\theta + \sin\theta\,\overline{A_1}$$

c'est-à-dire le tourner d'un angle θ autour de « l'axe » A_1, ensuite par le verseur

$$\cos\varphi + \sin\varphi\,\overline{B_1}$$

le faire tourner d'un angle φ autour de B_1, mais nous pouvons aussi directement lui appliquer le multiplicateur

$$\cos\psi + \sin\psi\,\overline{D_1};$$

où D_1 est un vecteur-unité normal au plan passant par R et R″, et ψ l'angle que font entre eux ces deux vecteurs. Le « produit » des deux premiers verseurs est donc un nouveau verseur, et le produit des deux quaternions

$$p = a + \overline{A}$$

et

$$q = b + \overline{B}$$

un nouveau quaternion dont l'expression se déduit de :

$$qp\mathrm{R} = (b + \overline{\mathrm{B}})(a + \overline{\mathrm{A}})\,\mathrm{R} = (b + \mathrm{VB})(a\mathrm{R} + \mathrm{VAR})$$
$$= ab\mathrm{R} + a\mathrm{VBR} + b\mathrm{VAR} + \mathrm{VBVAR}.$$

Les identités (16) et (15) permettent de substituer au dernier terme d'abord

$$-\mathrm{VAVRB}-\mathrm{VRVBA}$$

et ensuite

$$-\mathrm{AB.R}+\mathrm{AR.B}-\mathrm{VRVBA},$$

ce qui, A étant normal à R et AR zéro, se réduit à

$$-\mathrm{AB.R}-\mathrm{VRVBA},$$

nous trouvons donc

$$qp\mathrm{R}=(ab-\mathrm{AB})\mathrm{R}+a\mathrm{VBR}+b\mathrm{VAR}-\mathrm{VRVBA}$$
$$\equiv\left(ab-\mathrm{AB}+\overline{a\mathrm{B}+b\mathrm{A}+\mathrm{VBA}}\right)\mathrm{R}$$

et

$$qp=ab-\mathrm{AB}+\overline{a\mathrm{B}+b\mathrm{A}+\mathrm{VBA}}. \tag{18}$$

Les deux premiers termes forment la partie scalaire, les trois derniers la partie vectorielle du nouveau quaternion. A cause du dernier terme, pq n'est pas égal à qp : la multiplication n'est pas commutative, ce qui se voit d'ailleurs facilement par la figure 3. En effet, en appliquant au vecteur S successivement les opérateurs q et p, nous obtenons d'abord R' et ensuite S''; pq est donc équivalent à un quaternion opérant dans le plan SOS'', qui est différent du plan ROR'', dans lequel opère qp.

Considérons maintenant (fig. 4) trois quaternions p, q, r opérant dans les plans V_1, V_2, V_3. Le second faisant coïncider le vecteur S avec S_1, nous aurons

$$\mathrm{S}_1=q\mathrm{S};$$

de même

$$\mathrm{S}_2=p\mathrm{S}_1$$

et conséquemment

$$\mathrm{S}_2=pq\mathrm{S}.$$

Il en résulte que pq opère dans le plan V_4, et qu'il peut faire coïncider S_4 avec S_5, pourvu que les arcs (SS_2) et $(\mathrm{S}_4\mathrm{S}_5)$ soient égaux. On aura donc aussi

$$\mathrm{S}_5=pq\mathrm{S}_4,$$

ensuite

$$S_4 = rS_3$$

et enfin

(19) $$S_5 = pq.rS_3.$$

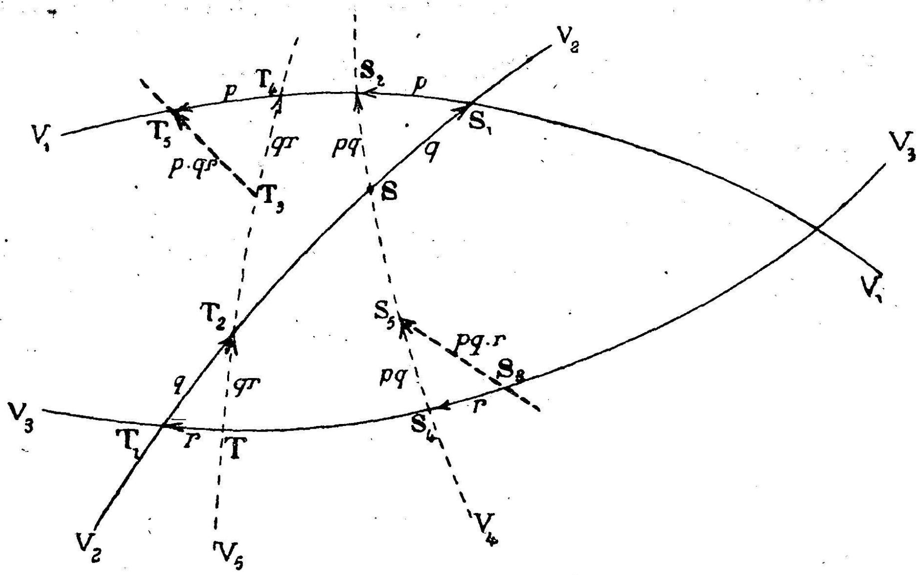

Fig. 4.

Par un raisonnement analogue, nous trouvons

$$T_1 = rT, \qquad T_2 = qT_1$$

et

$$T_2 = qrT$$

donc

$$T_4 = qrT_3, \qquad T_5 = pT_4$$

et enfin

(20) $$T_5 = p.qrT_3.$$

Les équations (19) et (20) nous montrent que $pq.\,r$ et $p.\,qr$ sont des quaternions, qui opèrent dans les plans (S_3S_5) et (T_3T_5), et pour que la multiplication soit associative $pq.\,r = p.\,qr$, il nous faudrait démontrer que les quatre vecteurs $S_3S_5T_3T_5$ sont dans un même plan, et que les arcs (S_3S_5) et (T_3T_5) sont égaux, ce que Hamilton fait *e. a.* en employant certaines propriétés des coniques sphériques. Mais nous pouvons aussi démontrer l'égalité des parties scalaires et celle des parties vectorielles pour les deux quaternions $pq.\,r$ et $p.\,qr$ en question.

En effet

$$S_2 = pqS = (ab - AB + \overline{aB + bA + VAB})\, S$$
$$S_5 = pqS_4 = pq.rS_3 = (ab - AB + \overline{aB + bA + VAB})\,(c + \overline{C})\, S_3$$

ce qui, multiplié d'après (18), donne pour la partie scalaire

$$\text{(21)} \qquad Spq.r = abc - (c.AB + a.BC + b.CA) - CVAB$$

tandis que la partie vectorielle

$$(ab - AB)\,\overline{C} + c\,\overline{(aB + bA + VAB)} + \overline{V\,(aB + bA + VAB)\,C}$$

dont le dernier terme est

$$-\overline{VCVAB}$$

ou (15)

$$-BC.\overline{A} + CA.\overline{B}$$

peut s'écrire

$$\text{(22)} \qquad \begin{aligned} Vpq.r = {} & (bc - BC)\,\overline{A} + (ca + CA)\,\overline{B} + (ab - AB)\,\overline{C} \\ & + a\overline{VBC} - b\overline{VCA} + c\overline{VAB} \end{aligned}$$

Pour le produit $p.\,qr$ nous trouvons

$$T_5 = pT_4 = p.qrT_3 = (a + \overline{A})\,(bc - BC + \overline{bC + cB + VBC})\, T_3.$$

Les parties scalaires et vectorielles en sont les mêmes que celles de $pq.\,r$. D'une manière analogue, on prouve que la multiplication est distributive : $p(q + r) = pq + pr$. Un produit de quaternions n'est donc pas commutatif, mais, en dehors de cela, il possède les propriétés d'un produit ordinaire.

10. Si les composantes rectangulaires de A et B sont $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3$, l'équation (18) devient :

$$\begin{aligned} qp = {} & ab - \mathcal{A}_1\mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_2\mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_3\mathcal{B}_3 + [b\mathcal{A}_1 + a\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2\mathcal{A}_3 - \mathcal{B}_3\mathcal{A}_2]\,\overline{i} \\ & + [b\mathcal{A}_2 + a\mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3\mathcal{A}_1 - \mathcal{B}_1\mathcal{A}_3]\,\overline{j} + [b\mathcal{A}_3 + a\mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_1\mathcal{A}_2 - \mathcal{B}_2\mathcal{A}_1]\,\overline{k} \end{aligned}$$

La formule du produit (18) nous permet de démontrer quelques relations importantes :

$$a) \qquad Kqp = Kp.Kq$$

et généralement

$$Kp_1p_2 \ldots p_n = Kp_nKp_{n-1} \ldots Kp_1.$$

En effet, en changeant (§ 6) le signe de la partie vectorielle, (18) nous donne

$$Kqp = ab - AB - a\overline{B} - b\overline{A} - \overline{VBA};$$

tandis que

$$Kp.Kq = (a - \overline{A})(b - \overline{B}) \equiv ab - AB - \overline{aB} - \overline{bA} + \overline{VAB}.$$

Nous avons donc

$$Kqp = Kp.\ Kq$$

et de même

$$\begin{aligned} Kq_1q_2 \ldots q_n &= K(q_2 \ldots q_n).Kq_1 = K(q_3q_4 \ldots q_n).Kq_2.Kq_1 \\ &= \ldots = Kq_n.\ Kq_{n-1}.\ Kq_{n-2} \ldots Kq_1 \end{aligned}$$

b) $$Sqp = Spq$$

et en général

$$Sq_1q_2 \ldots q_lq_{l+1} \ldots q_n = Sq_{l+1} \ldots q_nq_1 \ldots q_l)$$

car, comme la partie scalaire en (18) ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des quaternions, nous avons d'abord $Sqp = Spq$ et ensuite, pourvu qu'on garde le même ordre cyclique

$$\begin{aligned} Sq_1q_2 \ldots q_n &= S(q_1 \ldots q_l)(q_{l+1} \ldots q_n) = S(q_{l+1} \ldots q_n)(q_1 \ldots q_l) \\ &= Sq_{l+1}q_{l+2} \ldots q_nq_1q_2 \ldots q_l. \end{aligned}$$

c) Lorsque $p = m(\cos\theta + \sin\theta\,\overline{A_1})$ l'équation (18) donne

$$pp \equiv p^2 = m^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\overline{A_1}) \equiv m^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta\overline{A_1})$$

et généralement, quand r est un nombre entier positif

$$p^r = m^r(\cos r\theta + \sin r\theta\overline{A_1})$$

Il en résulte

$$\left(\cos\frac{\pi}{2m} + \sin\frac{\pi}{2m}\overline{A_1}\right)^m = \overline{A_1},$$

ce qui conduit tout naturellement à la convention

$$\cos\frac{\pi}{2m} + \sin\frac{\pi}{2m}\,\overline{\mathrm{A}}_1 \equiv \overline{\mathrm{A}}_1^{\,\frac{1}{m}}$$

et

$$\cos\frac{n}{m}\cdot\frac{\pi}{2} + \sin\frac{n}{m}\cdot\frac{\pi}{2}\,\overline{\mathrm{A}}_1 = \overline{\mathrm{A}}_1^{\,\frac{n}{m}}.$$

Cette dernière formule permet d'identifier un verseur quelconque à une puissance de son vecteur-unité.

11. *Division.* — Comme $q\,(q^{-1}p)$ ou $(qq^{-1})p$ est équivalent au quaternion p, il est tout naturel d'appeler $q^{-1}p$ le quotient de p par q, pour lequel on pourra encore écrire $\frac{p}{q}$, pourvu qu'on se rappelle constamment que cette fraction est $q^{-1}p$ et non pas pq^{-1}. Sa valeur (§ 7) est

$$q^{-1}p \doteq \frac{1}{b^2 + \mathfrak{B}^2}(b - \overline{\mathrm{B}})(a\ \ \mathrm{A})\overline{+} = \frac{1}{b^2 + \mathfrak{B}^2}\left(ab + \mathrm{AB} + \overline{b\mathrm{A} - a\mathrm{B} - \mathrm{VBA}}\right)$$

Il est maintenant facile d'interpréter une fraction, dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions entières des quaternions p, q, r,.....

12. *Vecteurs. Quaternions élémentaires.* — Un quaternion se réduit à un vecteur $\overline{\mathrm{A}}$ (quaternion élémentaire), quand sa partie scalaire est zéro, c'est-à-dire quand son angle est droit. Les règles trouvées pour les quaternions s'appliquent encore à ces vecteurs. Nous allons nous conformer, dans la suite, à la notation la plus répandue des quaternionistes qui représentent $\overline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{C}}, \ldots$ par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ leurs tenseurs par $\mathrm{T}\alpha, \mathrm{T}\beta\ldots$, les vecteurs-unité $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ par i, j, k, AB par $\mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta\cos\theta$, etc ; mais il sera bon de rappeler que $\overline{\mathrm{A}} \equiv \alpha$ est autre chose que A. Les équations que nous allons trouver sont des égalités de quaternions, dont chacune est équivalente, en général, à quatre équations entre scalaires.

a) Ce qui a été trouvé pour l'addition des quaternions permet de conclure, que la somme des vecteurs $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ est un nouveau vecteur, qu'on trouve en les composant comme des forces données ; cette somme est associative et commutative.

b) Pour les produits de deux vecteurs α et β, qui font entre eux l'angle θ, l'équation (18) nous donne

$$\alpha\beta = -AB + \overline{VAB} \qquad \beta\alpha = -AB + \overline{VBA} \tag{23}$$

Leurs scalaires sont égales :

$$S\alpha\beta = S\beta\alpha \tag{24}$$

avec la valeur commune $-T\alpha . T\beta . \cos\theta$. Leurs parties vectorielles diffèrent par le signe :

$$V\alpha\beta = -V\beta\alpha \tag{25}$$

le premier membre de (25) est $T\alpha\, T\beta \sin\theta . i'$, si i' est un vecteur-unité perpendiculaire à α et β, tel que α, β, i' forment un système droit. On a évidemment encore

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2S\alpha\beta \tag{26}$$

et

$$\alpha\beta - \beta\alpha = 2V\alpha\beta . \tag{27}$$

La partie scalaire $S\alpha\beta = 0$, lorsque α est perpendiculaire à β ; la partie vectorielle $V\alpha\beta = 0$, lorsque α est parallèle à β.

c) Pour le carré d'un vecteur, les équations (23) fournissent : $\alpha^2 = -(T\alpha)^2$; donc, pour le carré d'un vecteur-unité, quel qu'il soit -1. Il est donc $i^2 = -1$; $i^3 \equiv i^2 . i = -i$, etc.

d) Pour le produit $\alpha\beta\gamma$ de trois vecteurs, l'on trouve d'après (21) et (22)

$$S\alpha\beta\gamma = -CVAB$$

et

$$V\alpha\beta\gamma = -BC.\bar{A} + CA.\bar{B} - AB.\bar{C}$$

Il en résulte

$$S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta \tag{28}$$

et

$$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta . \tag{29}$$

Le premier membre de la dernière équation peut s'écrire

$$V\alpha(S\beta\gamma + V\beta\gamma)$$

ou

$$\alpha . S\beta\gamma + V\alpha V\beta\gamma,$$

de sorte que

$$V\alpha V\beta\gamma = - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta \tag{30}$$

ce qui, lorsqu'on y substitue le vecteur $V\delta\varepsilon$ au lieu de α, nous montre que

$$VV\delta\varepsilon V\beta\gamma = - \beta S\gamma(\delta\varepsilon - S\delta\varepsilon) + \gamma S(\delta\varepsilon - S\delta\varepsilon)\beta = - \beta S\gamma\delta\varepsilon + \gamma S\delta\varepsilon\beta \tag{31}$$

e) Enfin, nous avons d'après (§ 10, *a*) et (§ 7)

$$K\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n = K\alpha_n K\alpha_{n-1} \dots K_2 K_1$$

ou

$$K\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n = (-1)^n \alpha_n\alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_2$$

ce qui peut s'écrire

$$S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n - V\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n = (-1)^n [S\alpha_n\alpha_{n-1} \dots \alpha_1 + V\alpha_n\alpha_{n-1} \dots \alpha_1]$$

Il en résulte les deux équations :

$$S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n = (-1)^n S\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \tag{32}$$

et

$$V\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = (-1)^{n-1} V\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \tag{33}$$

dont (24) et (25) ne sont que des cas spéciaux.

Les équations (24 — 33) suffisent pour les nombreuses applications du calcul des quaternions.

M. Fr. Daniëls, Fribourg (Suisse).