V LE NOMBRE DES DIMENSIONS DE L'ESPACE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

jamais. Mais cette propriété n'est qu'une notion dérivée, et c'est en essayant de baser toute la théorie du parallélisme sur cette notion que l'on a exercé une influence fatale sur le développement de la géométrie.

En définissant les parallèles comme droites ne se rencontrant pas, on a substitué à une idée positive et innée de l'esprit une définition absolument négative ; on a abandonné le fond sûr des parties de l'espace accessibles à notre intuition pour des théories basées sur des parties de l'espace fermées à notre connaissance immédiate.

C'est de cette façon que l'on est arrivé à donner cette malheureuse définition du parallélisme qui, en regardant deux parallèles comme droites se coupant à l'infini, introduit déjà insensiblement dans la géométrie toutes les conceptions qui servent de base à la géométrie non-euclidienne, et qui sont contraires à la notion naturelle de l'espace. En spécifiant qu'il n'y a pas de bornes aux constructions géométriques dont nous avons l'idée, nous considérons la notion de l'infini comme positive alors qu'elle peut être essentiellement négative. Cet emploi de la notion de l'infini est peu compatible avec la logique, et peut-être est-il permis de croire que la connaissance de cette incompatibilité va croissant de jour en jour.

V

LE NOMBRE DES DIMENSIONS DE L'ESPACE

L'étude précédente a donc conduit à ce résultat : Dans l'espace partout homogène et constitué par trois dimensions indépendantes l'une de l'autre, il ne saurait exister d'autre géométrie que celle qui est d'accord avec les hypothèses euclidiennes. Cependant, la recherche de la forme de l'espace n'est pas encore pour cela terminée, vu que la question se pose aussitôt de savoir s'il y a une étendue ayant plus de trois dimensions. L'examen critique de cette question est d'autant plus nécessaire que l'on aperçoit facilement une connexion intime entre elle et la question de la structure de l'espace. Rappelons-nous comment, dans le chapitre précédent, nous avons fait dériver la notion de droite; c'est en nous basant sur l'indépendance mutuelle des *trois* directions fondamentales de l'espace, abstraction faite d'une *quatrième* dimension possible. Eu égard à ce nouveau cas, on serait peut-être contraint à modifier les conclusions obtenues.

On sait que les rapports intrinsèques des figures du plan euclidien ne changent pas quand on déforme ce plan en le faisant devenir cylindre. Cette flexion déforme aussi certaines droites du plan, mais de sorte qu'un être dont l'horizon serait borné à cette surface n'aurait pas conscience du changement.

Nous savons, de plus, que l'espace euclidien renferme des surfaces de courbure constante et négative, et que, ainsi que Beltrami l'a démontré, les théorèmes de la géométrie lobatschewskienne sont vrais sur ces surfaces, à cette différence près, que les lignes qui y remplacent les droites ne sont pas des droites absolues. Mais un être dont l'horizon ne dépasserait pas une telle surface ne s'apercevrait pas qu'elles ne sont pas droites.

D'une façon analogue, on n'est pas certain d'abord que, s'il existe des lignes droites dans l'espace à trois dimensions, cette qualité franchisse les bornes de cet espace; peut-être y a-t-il lieu pour cela de supposer que cet espace fait partie d'un espace ayant plus de trois dimensions et composé d'un nombre infini d'autres espaces triplement étendus obéissant à des lois différentes, par exemple à celles de Lobatschewsky.

Les amis de la Pangéométrie ont encore plus besoin de supposer un espace à plus de trois dimensions, et il suffit, pour le voir, de jeter un coup d'œil sur les formules analytiques des nouvelles théories. On sait que les diverses formes que la pangéométrie connaît sont caractérisées par les valeurs positives ou négatives, réelles ou imaginaires de certaines grandeurs. Tout en employant ces valeurs, il ne faut pas oublier que les grandeurs négatives et imaginaires n'existent point par elles-mêmes; elles n'ont qu'une existence relative, servant de pendant à celle des grandeurs positives et réelles; sans ces dernières, il ne serait pas possible de parler des quantités négatives ou imaginaires.

Établir un espace caractérisé par une valeur imaginaire comme un espace existant seul est une pure absurdité; pour qu'une grandeur caractéristique se présente comme imaginaire, il faut qu'il existe une grandeur analogue mais réelle, à l'égard de laquelle peut se reconnaître le caractère imaginaire de la première grandeur. Donc, hors de l'espace en question, il faudra toujours supposer un autre espace, c'est-à-dire admettre un espace à quatre dimensions renfermant complètement les espaces à trois dimensions susnommés. De toutes les manières, on se trouve ainsi conduit à examiner cette question : Quel est le nombre des dimensions de l'Espace? Peut-on établir un espace ayant plus de trois dimensions ? Un essai sur les fondements de la géométrie qui laisserait cette question pendante passerait à bon droit pour imparfait.

Gauss a énoncé le premier cette thèse, qu'il n'est pas impossible que l'Espace ait plus de trois dimensions : Non déconcertés par l'autorité de ce grand géomètre, qui n'hésitait pas à douter de l'intelligence de ses contradicteurs, examinons si son hypothèse est vraie. Du temps de Gauss, on le sait, elle avait déjà beaucoup de partisans; aujourd'hui, elle a presque le rang de dogme, aussi faut-il d'autant plus s'étonner que ceux qui affirment la possibilité d'un Espace à quatre dimensions contestent néanmoins avec zèle son existence réelle.

Et pourtant, si l'on ne peut douter de la possibilité de l'existence de cet espace, si c'est la seule infériorité de notre esprit qui nous empêche de nous l'imaginer, nous ne pouvons savoir effectivement si cet espace existe en réalité, sans que nous en ayions une connaissance directe. Si les spiritistes admettent que des actions émanées d'un espace hors de notre sphère peuvent influencer le monde dans lequel nous vivons, personne n'est capable de les réfuter. Ce qui fait que tout le monde s'oppose avec énergie à ces hypothèses, c'est évidemment parce que le sens commun ne voit pas pourquoi la quatrième dimension, tout à fait semblable aux trois dimensions que nous révèle l'expérience, serait fermée à nos yeux.

Voyons néanmoins sur quels arguments est basée la théorie de l'espace à plus de trois dimensions. Le plus important est l'analogie avec l'algèbre, qui ne connaît pas de bornes pour le nombre des grandeurs variables dont ses formules se composent. Cet argument est irréfutable pour une conception ne voyant dans l'espace que le symbole extérieur des relations algébriques :

tant que ces dernières n'offrent point d'incompatibilité, on aurait alors le droit d'admettre des formes de l'espace offrant l'image réelle des formules algébriques, et, par ainsi, on établirait évidemment que le nombre des dimensions de l'espace est infini.

Mais on dévoile la faiblesse de cet argument aussitôt que l'on considère le caractère intuitif de l'espace réel, qui est, en vérité, un attribut indispensable de cet espace. C'est précisément par cette qualité que l'espace géométrique se diffférencie des prétendus espaces algébriques, et, par suite, c'est elle que nous devons examiner pour décider la question des dimensions.

Analysons pour cela ce que nous sentons en déclarant l'espace comme notion intuitive; il est facile de reconnaître que cette notion contient un fondement essentiel : les éléments que renferme l'espace ne sont point nécessairement isolés, au contraire, on peut embrasser d'un seul regard une foule d'entre eux. L'espace n'est donc pas seulement composé de points, mais doit être considéré comme ensemble d'éléments qui renferment eux-mêmes une infinité de points, de lignes, de surfaces, peut-être même d'êtres d'un rang plus élevé encore. Ainsi, l'on parvient à des notions parfaitement nouvelles qui ne se trouveraient point dans un espace conçu seulement comme image de l'algèbre.

Or, si l'on fait varier une des grandeurs qui composent la variété, il est essentiel, pour la notion de celle-ci, que l'on puisse avancer de chacun de ses points en deux directions opposées; donc, dans l'ensemble des points obtenus par la variation de la grandeur en question, c'est-à-dire dans la ligne, on peut distinguer deux moitiés séparées par un point quelconque; chacune des moitiés naît du mouvement contraire à celui par lequel l'autre est établie. Ainsi, chaque ligne a un double sens; nous allons voir que l'ensemble des lignes, ou la surface doublement étendue, peut se comprendre aussi en un double sens.

Nous avons déjà exposé qu'une telle surface s'obtient en faisant varier deux des diverses grandeurs indépendantes entre elles dont la variation constitue tout l'espace. Désignons par x_1 et x_2 ces deux variables, et considérons la surface qui est le produit de leur variation. Par chaque point de cette surface on peut tracer la ligne, caractérisée par une valeur constante de x_2, x_1

changeant indéfiniment, et l'on peut aussi tracer une seconde ligne renfermant tous les points obtenus par une valeur fixe de x_1 et des valeurs indéfiniment variables de x_2.

Sur chacune de ces lignes on peut distinguer deux moitiés séparées par le point commun susdit, et, comme elles sont opposées l'une à l'autre, il est permis de les désigner par $+x_1$, $-x_1$; $+x_2$, $-x_2$.

En dehors de ces lignes, il y en a une infinité d'autres passant par le point en question; on les obtient en faisant varier simultanément x_1 et x_2, de façon à ce qu'elles satisfassent à une relation quelconque. Par exemple, on peut passer de la première des lignes susdites aux voisines en diminuant peu à peu la variation de x_1 et faisant croître constamment la grandeur x_2, primitivement fixe. On s'éloigne ainsi de plus en plus de la première ligne pour se rapprocher, en même temps, de la seconde, que caractérise une valeur constante de x_1. Comme les deux droites sont dans le même rapport l'une à l'égard de l'autre, en continuant ce mouvement, on reviendra de la seconde à la première.

Voici donc une marche circulaire par laquelle se fait l'établissement de toute la surface étudiée; il est clair que cette marche peut avoir lieu de deux façons, car chacune des deux moitiés de la première ligne ayant le même rapport à chacune des deux moitiés de la seconde, deux chemins s'ouvrent. En suivant le premier, on passera de la première ligne à la seconde, de sorte que tous les points de la moitié $+x_1$ viennent coïncider avec ceux de la moitié $+x_2$, tandis qu'en même temps la moitié $-x_1$ coïncide avec $-x_2$. La continuation du mouvement fait coïncider $+x_2$ axec $-x_1$ et $-x_2$ avec $+x_1$.

En suivant le second chemin, la moitié $+x_1$ coïncidera d'abord avec $-x_2$, et $-x_1$ avec $+x_2$; ensuite $-x_2$ avec $-x_1$ et $+x_2$ avec $+x_1$. C'est-à-dire que, pour construire le plan x_1x_2 par le mouvement d'une droite passant par un point quelconque de ce plan, on peut procéder de deux manières, en suivant l'une des deux dispositions :

$$+x_1 \quad +x_2 \quad -x_1 \quad -x_2 \quad +x_1 \ldots\ldots \text{(A)}$$
$$+x_1 \quad -x_2 \quad -x_1 \quad +x_2 \quad +x_1 \ldots\ldots \text{(B)}$$

Il n'y en a point d'autres; elles se déduisent l'une de l'autre par le changement de x_2 en $-x_2$, et montrent que l'on peut concevoir le plan x_1x_2 comme produit par le mouvement susdit en double sens.

Ceci posé, considérons le rapport de ce plan à la troisième coordonnée de l'espace à trois dimensions, coordonnée que nous désignons par x_3. On peut mesurer ses valeurs sur une droite passant par le point qui était déjà l'origine des coordonnées x_1 et x_2; sur cette droite, nous distinguons deux moitiés que l'on peut désigner par $+x_3$ et $-x_3$, et le point qui les sépare est l'origine commune des coordonnées x_1, x_2 et x_3. C'est par ce point que nous avons fait passer la ligne décrivant dans son mouvement le plan x_1x_2, et comme ce mouvement peut être pris dans deux sens, un rapport mutuel entre les deux moitiés de la droite x_3 et les deux dispositions (A) et (B), possibles sur le plan x_1x_2, s'offre de lui-même. Par exemple, on peut convenir que la moitié $+x_3$ et le sens (A) ont entre eux la même relation que la moitié $-x_3$ et le sens (B).

Ceci est toujours vrai, quel que soit le point qui sert d'origine aux trois coordonnées, chacune des droites sur lesquelles on mesure la coordonnée x_3 a deux moitiés séparées l'une de l'autre par un point du plan x_1x_2; il s'ensuit que, dans un espace qui n'est déterminé que par les trois coordonnées $x_1 x_2 x_3$, il est impossible de parvenir d'un point de la moitié $+x_3$ à un point quelconque de la moitié $-x_3$ sans traverser le plan x_1x_2; les deux moitiés de la coordonnée x_3 se faisant essentiellement pendant vis-à-vis du plan x_1x_2, le passage d'une moitié à l'autre est déterminé par ce plan même.

Aussi, est-il impossible que les droites fondamentales de l'espace à trois dimensions soient rentrantes en elles-mêmes si elles ne quittent pas cet espace. Elles ne pourraient revenir ainsi sans en sortir, ce qui entraînerait inévitablement cette hypothèse que l'espace à trois dimensions soit contenu dans un espace à plus de trois dimensions. Et si l'on était conduit à nier l'hypothèse de cet espace multiple, on aurait en même temps le droit de déclarer que l'espace triplement étendu n'est nullement un élément d'espace supérieur, mais que c'est plutôt un espace autonome, dont chaque dimension est infinie, et dont les lignes fondamentales ne rentrent jamais en elles-mêmes.

Par l'analyse de la structure de l'espace triplement étendu, que nous venons de donner, nous avons maintenant les moyens de juger de la structure qu'il faudrait trouver dans un espace de quatre dimensions. Il est clair qu'il renfermerait un nombre infini d'espaces à trois dimensions, de même que celui-ci est l'ensemble d'innombrables surfaces à deux dimensions.

Nous avons vu comment l'espace à trois dimensions se montre composé, au point de vue d'un tel ensemble. Nous avons pu choisir chaque point d'une surface à deux dimensions comme origine des deux moitiés d'une droite représentant la troisième dimension, en sorte que chaque moitié répondît à l'une des deux conceptions qui sont seules admissibles sur cette surface. Ceci peut s'exprimer autrement, ainsi : le double sens dans lequel on peut prendre la surface doublement étendue lui donne une certaine *bilatéralité*, qui permet d'enfiler un nombre indéfini de surfaces pareilles le long d'une droite, en sorte que, si l'on suit cette droite dans une de ses deux directions, toutes les surfaces se présentent sous l'un des deux aspects exposés plus haut, peut-être sous l'aspect (A), tandis qu'en suivant la droite dans la direction opposée, elles se présentent sous l'autre aspect, peut-être (B) [1].

D'une façon analogue, il faudrait qu'un espace de quatre dimensions pût se considérer comme l'ensemble d'espaces à trois dimensions enfilés le long d'une ligne qui représenterait la quatrième dimension. Chacun des espaces que caractériserait une valeur constante de la quatrième coordonnée x_4 et des valeurs indéfiniment variables des trois premières coordonnées $x_1 x_2 x_3$ serait percé par cette ligne en un point, et comme elle s'étend à partir de ce point suivant les deux directions $+x_4$ et $-x_4$, il serait indispensable que, pour répondre au choix fait de l'une ou de l'autre des directions de la ligne x_4, chacun des espaces à trois dimensions pût aussi être pris dans un double sens.

Bref, il faudrait trouver dans l'espace triplement étendu une

---

(1) Toutes les surfaces ont un double sens tel que nous l'avons exposé ; il ne faut même pas en excepter les surfaces qu'on appelle *unilatères*, c'est-à-dire les surfaces dont les deux côtés se transforment l'un dans l'autre, car en faisant mouvoir une ligne, de façon à ce qu'elle décrive une telle surface, il y a deux chemins opposés pour faire reprendre à cette ligne sa position initiale.

bilatéralité analogue à celle que nous avons analysée plus haut, dans la surface à deux dimensions. Or, rappelons-nous que cette bilatéralité de la surface est le produit de la description de cette surface par le mouvement d'une ligne à une dimension autour du point fixe par lequel passait la ligne x_3, et que, pour ce mouvement, on pouvait suivre indifféremment le sens (A) ou le sens (B).

Pour se conformer à cela, il faudrait pouvoir engendrer l'espace triplement étendu dans un double sens, en faisant mouvoir une surface doublement étendue, de façon à ce qu'elle contienne toujours le point fixe où la ligne x_4 perce l'espace $x_1\, y_2\, x_3$.

Ce mouvement ne peut s'opérer qu'en choisissant une ligne fixe passant par le point considéré, et chacune des surfaces qui contiennent cette ligne, se déplaçant, de sorte que cette ligne garde sa place primitive, engendrerait l'espace triplement étendu dont nous parlons. On pourrait, par exemple, choisir le plan $x_1 x_2$ pour surface génératrice. En remplaçant successivement la valeur de x_2 par d'autres valeurs, jusqu'au moment où l'on reviendrait à la valeur primitive, on donnerait à ce plan un mouvement qui lui ferait engendrer l'espace $x_1 x_2 x_3$, et durant lequel la ligne x_1 garderait sa position, ce que nous avions demandé.

Il est clair que ce mouvement pourrait se produire dans un double sens, car les substitutions de la coordonnée variable seraient susceptibles d'avoir lieu dans l'ordre $+x_2 + x_3 - x_2 - x_3 + x_2 \ldots$, ou dans l'ordre inverse $+x_2 - x_3 - x_2 + x_3 + x_2 \ldots$ Il semble donc que l'on ait ainsi découvert la bilatéralité demandée dans l'espace à trois dimensions.

Cependant, il est facile de voir que cette bilatéralité n'est basée que sur une fausse apparence. En effet, pour l'obtenir, il a fallu choisir d'abord une ligne qui, pendant tout le mouvement que nous venons de décrire, demeurât fixe. Toutes les lignes de l'espace considéré peuvent remplir ce rôle de directrices, car elles sont toutes équivalentes et aucune d'elles n'est privilégiée. Et comme nous n'avons pas le droit de donner à l'une d'elles une préférence arbitraire, il y a un nombre infini de moyens distincts d'obtenir la bilatéralité dont nous avons besoin pour l'espace à trois dimensions.

Mais cette bilatéralité indéterminée et arbitraire ne suffit pas à notre objet; il nous faut une bilatéralité d'espace qui nous permette de supposer une relation entre les deux moitiés de la ligne x_4 et les deux conceptions auxquelles il serait possible de soumettre l'espace $x_1\,x_2\,x_3$. Le seul élément commun à cette ligne et à cet espace était le point où la première perce le deuxième; donc, il nous fallait une bilatéralité complètement déterminée par ce point seul, et résultant nécessairement de la nature intrinsèque de l'espace à trois dimensions considéré.

Les surfaces à deux dimensions possèdent cette bilatéralité, mais l'espace à trois dimensions en est privé, puisque nous y avons trouvé plutôt un nombre infini de formes sous lesquelles il nous apparaît comme bilatéral, selon le nombre infini de lignes directrices qui s'offrent pour les différents cas de sa génération.

Que si l'on choisit un de ces cas en particulier, on crée une bilatéralité qui n'*est pas l'essence même de cet espace*, et qu'on lui donne arbitrairement. Cette bilatéralité, cela est clair, ne lui appartient pas en tant que qualité intrinsèque; elle lui est apportée du dehors, et ne permet pas d'établir un rapport entre cet espace et les deux moitiés de la ligne x_4, rapport que nous avions reconnu comme condition indispensable pour admettre l'existence d'un espace de quatre dimensions.

Il faut donc reconnaître qu'il n'y a pas de place dans l'espace pour la quatrième dimension; celle-ci disparaît, et, — comme chacun le verra aisément en analysant ses propres sentiments, — elle disparaît à la suite d'un raisonnement qui n'est que la traduction exacte des motifs pour lesquels le sens commun a toujours énergiquement refusé d'admettre l'hypothèse d'un espace de quatre dimensions.

La quatrième dimension disparue, il est évident qu'il ne saurait y avoir de place pour une autre. Le seul espace capable d'une existence réelle est donc l'espace à trois dimensions, et, en ce qui le concerne, nous avons reconnu plus haut qu'il était obligatoire de lui supposer une étendue infinie dans toutes les directions.

Voici donc notre étude achevée [1]. En avançant pas à pas,

[1] On trouve d'autres études sur le thème discuté ci-dessus, ainsi qu'en particu-

nous nous sommes d'abord convaincus que la géométrie lobatschewskienne ne répond pas complètement aux hypothèses sur lesquelles elle est basée, et qu'il faut reconnaître la nécessité des suppositions d'Euclide, dont elle avait douté; nous avons pu, en second lieu, mettre hors de doute que les notions fondamentales de l'espace euclidien à trois dimensions résultent nécessairement des conceptions que chaque esprit intelligent possède sur l'idée même de l'espace; enfin, nous avons pu démontrer, en toute évidence, que la nature de cet espace défend de lui supposer une quatrième dimension.

En résumant tout cela, nous pouvons énoncer ce résultat : Il n'y a effectivement qu'une seule géométrie d'accord avec la nature même de l'espace, c'est celle de l'espace à trois dimensions, infini en toutes les directions, et conforme aux hypothèses d'Euclide.

Fr. Pietzker (Nordhausen).

Note de la rédaction. — *Nous devons la rédaction française de cette intéressante étude au bienveillant concours de M. et Mme* Barbarin, *à Bordeaux. Ils ont bien voulu traduire les trois premiers chapitres et revoir la traduction des chapitres IV et V due à M. Pietzker. Au nom de l'auteur et en notre nom personnel nous tenons à leur exprimer ici notre vive reconnaissance pour les soins qu'ils ont donnés à cette rédaction.*

---

lier un examen critique des théories établies par divers savants sur les bases des conceptions nouvelles de l'espace, dans l'ouvrage déjà cité de l'auteur *Die Gestaltung des Raumes.* (La forme de l'Espace). (Voir la note, p. 11.)