NOTES SUR LA MÉCANIQUE

NOTES SUR LA MÉCANIQUE

1. Sur les forces qui coupent une droite.

a) *On peut aussi dans ce cas, plus général que celui des forces centrales, exprimer la vitesse et la force en fonction des seules* ρ, θ, ψ *et de leurs dérivées par rapport à* ψ, d'une manière tout à fait analogue au cas des forces centrales.

En effet, nous avons en général :

$$v^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2 \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2; \qquad (\alpha)$$

mais, la projection de la force sur le plan des xy, perpendiculaire à la droite qu'elle coupe (axe des z) étant une force centrale, on a :

$$\rho_1{}^2 d\theta_1 = c\,dt, \text{ ou bien } \rho^2 \sin^2\theta\, d\psi = c\,dt, \qquad (\beta)$$

car les coordonnées polaires planes de la projection du mobile sur le plan des xy sont : $\rho_1 = \rho \sin\theta$, $\theta_1 = \psi$.

Donc (α) prend la forme :

$$v^2 = \frac{c^2}{\sin^4\theta}\left[\frac{1}{\rho^2}\left(\sin^2\theta + \left(\frac{d\theta}{d\psi}\right)^2\right) + \left(\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\psi}\right)^2\right], \qquad (1)$$

qui constitue une généralisation de la formule des forces centrales :

$$v^2 = c^2\left[\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\theta}\right)^2\right]; \qquad (1')$$

$(1')$ s'obtient de (1), en y faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$ (et $\psi = \theta$).

Pour trouver maintenant la force accélératrice F, nous avons pour sa projection F_1 sur le plan des xy (formule de *Binet*) :

$$F_1 = F \sin \theta = \frac{2c}{\rho_1^2}\left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\theta_1^2}\right]. \qquad (2')$$

d'où :

$$F = \frac{c^2}{\rho^2 \sin^3 \theta}\left[\frac{1}{\rho \sin \theta} + \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho \sin \theta}\right)}{d\psi^2}\right],$$

ou bien, après quelques calculs,

$$F = \frac{c^2}{\rho^2 \sin^4 \theta}\left[\frac{1}{\rho}\left((1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \theta)\left(\frac{d\theta}{d\psi}\right)^2 - \operatorname{ctg} \theta \frac{d^2\theta}{d\psi^2}\right)\right.$$
$$\left. - 2 \operatorname{ctg}\theta \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\psi} \frac{d\theta}{d\psi} + \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\psi^2}\right]; \qquad (2')$$

cette formule est bien une généralisation de celle de *Binet* (2'), qui résulte de (2) pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (et $\psi \equiv \theta$).

b) Si les équations polaires de la trajectoire sont données, les formules (1) et (2) nous font connaître, par de simples différentiations, la vitesse et la force. Réciproquement, si l'on se donne la force accélératrice en fonction des ρ, θ, ψ, soit $F = \sigma(\rho, \theta, \psi)$, on aura, pour déterminer la trajectoire, à intégrer le système des deux équations différentielles polaires de la courbe : l'une d'elles est l'équation (2), où $F = \sigma(\rho, \theta, \psi)$, l'autre se trouve comme il suit : en appelant F_2 la projection de la force sur l'axe des z, on a :

$$F = \frac{F_2}{\cos \theta},$$

et en effectuant les différentiations, eu égard à la formule (3), on trouve :

$$\sigma(\rho,\theta,\psi) = \frac{1}{\cos\theta}\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{d^2(\rho\cos\theta)}{dt^2},$$

$$\sigma(\rho,\theta,\psi) = \frac{c^2}{\rho^2 \sin^4 \theta}\left[\frac{1}{\rho}\left(-\operatorname{tg}\theta \frac{d^2\theta}{d\psi^2} + \left(\frac{d\theta}{d\psi}\right)^2\right)\right.$$
$$\left. + 2\operatorname{ctg}\theta \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\psi}\frac{d\theta}{d\psi} - \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\psi^2}\right],$$

qui est bien la seconde équation cherchée.

c) Si la force est perpendiculaire à l'axe des z, on a :

$$\frac{d^2z}{dt^2}=0 \quad \text{ou} \quad z=At+B;$$

si maintenant la vitesse initiale est, elle-même, perpendiculaire à l'axe, on aura $A=\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0}=0$, donc $z=B$, c'est-à-dire la trajectoire se trouve dans un plan parallèle au plan des xy et le mouvement est central ; si $A \gtrless 0$, le mouvement semble central à un observateur entraîné par le plan mobile $z=At+B$.

2. Sur les accélérations d'ordres supérieurs.

L'accélération du n^ième^ ordre est ordinairement définie *comme la limite du rapport de l'accroissement géométrique de l'accélération précédente d'ordre* n — 1 (= *vitesse, pour* n = 2) *à l'accroissement correspondant* Δt *du temps.*

Cependant, pour l'accélération ordinaire de l'ordre 2 $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$, il existe aussi une autre manière de la trouver : *l'accélération de l'ordre* 2 *est la limite du rapport du double de la déviation à* $(\Delta t)^2$.

Nous allons maintenant montrer que *cette définition s'étend à l'accélération d'un ordre quelconque* n.

A cet effet, soit $M(t_0, x_0, y_0, z_0)$ le point considéré de la trajectoire et M' la nouvelle position du mobile au bout du temps $\Delta t \equiv t-t_0$, et considérons les développements des coordonnées du mobile :

$$\left\{\begin{array}{l} x=x_0+\left(\frac{dx}{dt}\right)_0(t-t_0)+\ldots+\left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_0\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\left(\frac{d^nx}{dt^n}\right)_0\frac{(t-t_0)^n}{n!} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\ldots, \\ y=y_0+\ldots\ldots, \qquad\qquad z=z_0+\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si nous construisons maintenant la courbe suivante (K) :

$$\left.\begin{array}{l} X=x_0+\left(\frac{dx}{dt}\right)_0(t-t_0)+\ldots+\left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_0\frac{(t-t_0)^{n-1}}{n-1!}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad Y=y_0+\ldots, \; Z=z_0+\ldots, \end{array}\right\} \quad (K)$$

elle aura, par la manière même dont elle est formée, un contact d'ordre $n - 1$, en M, avec la trajectoire.

Si, de plus, nous concevons que le mobile, à partir de M, se mouvait sur (K), au bout du temps Δt il arriverait en un point M″ de cette courbe ; le segment rectiligne M″ M′ sera nommé, ici encore, *la déviation* du mobile, la déviation *d'ordre* $n - 1$.

Or, on a :

$$\text{Proj}_x(\text{M}''\text{M}') = \left(\frac{d^n x}{dt_n}\right)_0 \frac{(t-t_0)^n}{n!} + \left(\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}\right)_0 \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots$$

et de même pour proj_y (M″ M′), proj_z (M″ M′) ; donc, si nous formons l'expression :

$$n!\,\frac{\text{M}''\text{M}'}{(t-t_0)^n},$$

sa limite pour $t = t_0$:

$$\lim \left\{ n!\,\frac{\text{M}''\text{M}'}{(\Delta t)^n} \right\}_{\Delta t = 0}$$

aura évidemment pour projections sur les axes :

$$\frac{d^n x}{dt^n}, \quad \frac{d^n y}{dt^n}, \quad \frac{d^n z}{dt^n},$$

donc : *L'accélération de l'ordre* n *est égale à la limite du* n ! — *ple de la déviation d'ordre* n — 1 *divisée par* $(\Delta t)^n$, ce qui constitue l'extension cherchée.

Il est à remarquer qu'une infinité de courbes peuvent servir à la définition de l'accélération d'ordre n par la déviation : toutes celles, on le voit tout de suite, qui ont avec (K) un contact d'ordre $n - 1$ au moins, et qui, par conséquent, sont contenues dans les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \text{X}_1 &= x_0 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 (t-t_0) + \ldots + \left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_0 \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \\ &\qquad + \text{A}_{n+1} \frac{(t-t_0)^{n1}}{(n+1)!} + \ldots \\ \text{Y}_1 &= y_0 + \ldots\ldots, \qquad \text{Z}_1 = z_0 + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} (\text{K}')$$

Par exemple, pour l'accélération d'ordre 2, on peut, au lieu de la tangente, prendre une quelconque des courbes :

$$\text{X}_1 = x_0 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 (t-t_0) + \text{A}_3 \frac{(t-t_0)^3}{3!} + \ldots, \text{Y}_1 = y_0 + \ldots, \text{Z}_1 = z_0 + \ldots$$

Les courbes (K′) ont avec la trajectoire un contact d'ordre $n-1$, en général, et non n (à moins que $\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)_0 = \left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)_0 = 0$). Ajoutons encore qu'*au point de vue mécanique* cette définition de la déviation d'ordre n diffère de celle de l'ordre 2, en ceci que, pour cette dernière, le point M″ est la position du mobile sur la tangente, au bout du temps Δt, *si la force cessait, à partir de* M, *d'agir*, tandis que, pour la déviation d'ordre n, M″ sera la position du mobile, au bout du temps Δt, sur la courbe (K), ou, plus généralement une des (K′), *position que le mobile atteindra, si, à partir de* M, *l'on ajoute une force convenablement choisie à celle donnée d'avance;* mais cela constitue encore une généralisation; en effet, il suffit, pour le cas $n = 2$, de prendre cette nouvelle force égale et opposée à la force donnée, pour que le mobile se meuve sur la tangente. Pour trouver dans le cas général $n > 2$ cette nouvelle force N, nous remarquons que cette force N et la force donnée mouveront le mobile sur la courbe (K′), donc leur résultante R aura pour projections sur les axes :

$$m\,\frac{d^2 X_1}{dt^2}, \text{ etc.};$$

par suite N (X_2, Y_2, Z_2) qui est la différence géométrique de R et de la force donnée, aura pour projections :

$$X_2 = m\,\frac{d^2 X_1}{dt^2} - m\,\frac{d^2 x}{dt^2} = m\,\frac{d^2(X_1 - x)}{dt^2} = m\left\{-\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)_0 \frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \left[A_{n+1} - \left(\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}\right)_0\right] \cdot \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\ldots\right\}, \text{ etc.}$$

la force N est donc un infiniment petit d'ordre $n-2$ par rapport à $\Delta t \equiv t - t_0$.

Pour $n = 2$, on aurait de même,

$$X_2 = m\left\{-\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)_0 + \left[A_3 - \left(\frac{d^3 x}{dt^3}\right)_0\right] \frac{(t-t_0)}{1} + \ldots\right\}, \text{ etc.},$$

d'où, pour $t = t_0$, en M, on a bien :

$$(X_2)_{t=t_0} = -m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)_0, \text{ etc.},$$

comme il fallait s'y attendre.

N.-J. HATZIDAKIS (Athènes).