

A. — Les extensions de la notion de nombre ; LEUR DÉVELOPPEMENT LOGIQUE.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tres branches de la science, soit encore à donner un court aperçu historique de la théorie.

A titre d'exemple, nous examinerons le développement de la notion de nombre. Cette notion joue un rôle fondamental dans les divers degrés de l'enseignement des mathématiques, et, à ce titre, est tout particulièrement désignée pour faire l'objet d'une ou de plusieurs leçons générales à la fin de l'enseignement secondaire supérieur ou au début d'un premier cours d'Algèbre supérieur. Elle permet aisément de jeter un coup d'œil sur le chemin parcouru depuis les premières leçons sur la numération et de conduire l'élève au seuil des mathématiques supérieures. Il est certain que l'étudiant poursuivra avec beaucoup d'intérêt les diverses étapes franchies depuis la notion de nombre entier jusqu'à celle de nombre algébrique envisagée dans son sens le plus général; d'autre part, il se rendra aisément compte que l'Algèbre n'est pas limitée aux quelques théories élémentaires inscrites aux programmes des gymnases.

En procédant de la même manière pour les diverses notions fondamentales des mathématiques élémentaires, le maître parviendra à donner aux élèves un tableau très net de l'ensemble des notions acquises et contribuera à développer chez eux la pensée mathématique.

Bien que cette petite note n'apporte aux mathématiciens aucun fait nouveau, nous croyons que les professeurs directement intéressés examineront avec intérêt un exemple d'une leçon de révision envisagée sous la forme la plus large possible. Suivant les connaissances de leurs élèves, ils pourront donner plus de développement à certaines questions, ou laisser de côté les considérations d'un caractère trop élevé.

A. — LES EXTENSIONS DE LA NOTION DE NOMBRE ; LEUR DÉVELOPPEMENT LOGIQUE.

1. — Nous partons de l'idée de *nombre entier* résultant de l'idée de collection d'objets distincts, et nous passerons en revue les diverses extensions auxquelles on est conduit si l'on soumet les nombres entiers aux *opérations arithmétiques*, c'est-à-dire si

l'on combine, d'après les règles établies en Arithmétique, deux ou plusieurs de ces nombres pour en former un seul.

Ces opérations peuvent être réparties en deux catégories. La première comprend les trois *opérations directes* : *addition*, *multiplication* et *élévation à une puissance*. Appliquées à deux nombres entiers a et b elles donnent encore un nombre entier, qui porte le nom de *somme* ($a + b = c$), de *produit* ($a \cdot b = c$) ou de *puissance* ($a^b = c$).

Il est bon de rappeler ici les *propriétés commutatives*, *associatives* et *distributives* de l'addition et de la multiplication, et d'insister tout particulièrement sur ce que la propriété commutative n'est plus applicable à l'élévation à une puissance.

Ces propriétés se trouvent résumées dans le tableau suivant :

Propriété commutative.

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

Propriété associative.

$$a + (b + c) = a + b + c \qquad a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

Propriété distributive.

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

2. — Si maintenant on se donne un nombre entier c défini par les opérations directes

$$a + b = c, \qquad a \cdot b = c, \qquad a^b = c,$$

et si l'on se propose de déterminer l'un des nombres a ou b , l'autre étant également connu, on parvient à une seconde catégorie d'opérations. Elles portent le nom d'*opérations indirectes*; ce sont : la *soustraction*, la *division*, l'*extraction d'une racine* et la *recherche d'un logarithme*. Le résultat de l'opération porte le nom de *différence*, de *quotient*, de *racine* ou de *logarithme*. La loi commutative n'étant plus applicable à l'élévation à une puissance, on se trouve conduit à deux opérations indirectes.

En résumé on a le tableau :

Opérations directes.

$$a + b = c$$

$$a \cdot b = c$$

$$a^b = c$$

Opérations indirectes.

$$a = c - b \quad \text{ou} \quad b = c - a$$

$$a = c : b \quad \text{ou} \quad b = c : a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \sqrt[b]{c} \\ b = \log_a c \end{array} \right.$$

Ce sont les opérations indirectes qui nous fournissent les diverses extensions de la notion de nombre. En effet, si l'on se limite aux nombres entiers.

- $c - b$ n'a plus de sens si $c < b$,
- $c : b$ » » » c n'est pas un multiple de b ,
- $\sqrt[b]{c}$ » » » c n'est pas la b^{e} puissance d'un nombre entier,
- $\log_a c$ » » » c n'est pas une puissance de a .

Au lieu d'imposer des restrictions aux nombres entiers que l'on soumet aux opérations indirectes, on étend le domaine des nombres.

La soustraction donne lieu à une *première extension*. Pour être applicable dans tous les cas, elle impose l'introduction des *nombres négatifs*.

De la même manière, la division, pour être toujours possible, exige l'introduction des *nombres fractionnaires*. C'est là une *seconde extension*.

L'ensemble des nombres entiers et des nombres fractionnaires constitue le domaine des *nombres rationnels*. Nous nous bornerons, pour le moment, aux nombres positifs.

La notion de *nombre irrationnel* constitue une *troisième extension*. Elle résulte des deux dernières opérations indirectes lorsqu'on lève les restrictions indiquées plus haut.

Les idées de nombre négatif et de nombre fractionnaire sont, en général, assez familières aux élèves. Mais il n'en est pas toujours ainsi pour les nombres irrationnels ; pourtant, sans entrer dans des développements théoriques qui seraient déplacés dans un enseignement élémentaire, on peut aisément donner aux élèves une idée très nette de ces nombres ; aussi nous paraît-il indispensable de fournir quelques indications à leur sujet.

3. — Un nombre irrationnel est défini à l'aide de deux suites illimitées de nombres rationnels. Nous montrerons d'abord, sur un exemple simple, comment on peut envisager deux pareilles classes de nombres rationnels.

Considérons, par exemple, la racine carrée de 5, ou, ce qui revient au même, l'équation :

$$x^2 - 5 = 0.$$

Il n'existe aucun nombre rationnel vérifiant cette équation ; mais si on envisage l'ensemble des nombres rationnels (positifs) on peut les répartir en deux classes (α) et (β) ; la classe (α) renfermant ceux dont le carré est plus petit que 5, et la classe (β) renfermant ceux dont le carré est plus grand que 5. Les nombres α et β sont donc définis par les inégalités

$$\alpha^2 < 5, \quad \beta^2 > 5.$$

On pourra, par exemple, former le tableau :

(α)	< x <	(β)
2	< x <	3
2, 2	< x <	2, 3
2, 23	< x <	2, 24
2, 236	< x <	2, 237
2, 2360	< x <	3, 2361
.....

Les α forment une suite illimitée de nombres rationnels croissants, tandis que les β forment une suite illimitée de nombres rationnels décroissants. La différence entre deux nombres correspondant peut être rendue aussi petite que l'on veut.

Les α donnent une *valeur approchée par défaut*, les β une *valeur approchée par excès*.

D'une manière générale nous dirons qu'un nombre irrationnel N est défini par deux suites illimitées de nombres rationnels (α) et (β), telles que l'on ait

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n < \dots < N$$

$$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \dots > \beta_n > \dots > N,$$

la différence $\beta_n - \alpha_n$ pouvant être rendue aussi petite que l'on veut. Tout nombre irrationnel décompose donc l'ensemble des nombres rationnels en deux classes (α) et (β) jouissant des propriétés suivantes : 1) Tout nombre α est plus petit que tout nombre β ; 2) il n'y a, ni dans la première classe de nombre supérieur à tous les autres, ni dans la seconde classe de nombre inférieur à tous les autres.

4. — On se sert quelquefois, pour désigner un nombre irra-

tionnel, de la dénomination de *nombre incommensurable*. Elle a pris naissance dans la théorie de la mesure des longueurs. Étant donnée une longueur \bar{L} et une longueur-unité U , le nombre N qui indique combien de fois U est contenu dans L est dit *incommensurable* si, pour n aussi grand que l'on veut, la longueur $\frac{U}{N}$ n'est jamais comprise un nombre entier de fois dans L . Les longueurs L et U sont dites *incommensurables entre elles*. La Géométrie nous fournit des exemples de nombres irrationnels (ou incommensurables) : le rapport de la diagonale du carré à son côté, et le rapport de la circonférence de cercle à son diamètre. Nous verrons plus loin qu'il s'agit là de deux irrationalités de natures différentes.

5. — Après chaque extension de la notion de nombre l'Arithmétique montre comment les règles de calcul des *opérations élémentaires* (addition, multiplication, soustraction et division) peuvent être étendues aux nouveaux symboles. La soustraction amène l'extension de la notion de nombre négatif aux nombres fractionnaires et aux nombres irrationnels. On se trouve maintenant en présence du domaine des *nombres réels* comprenant l'ensemble des nombres rationnels ou irrationnels, positifs ou négatifs. Ces nombres peuvent être soumis sans restriction aux opérations élémentaires.

6. — Il n'en est plus de même si l'on effectue sur les nombres rationnels ou irrationnels les opérations inverses de l'élevation à une puissance. De nouvelles restrictions s'imposent. En effet, tandis que $a^b = c$ conserve une signification précise quelles que soient les valeurs attribuées à a et à b , les opérations inverses ne sont pas toujours possibles. Nous nous bornerons au cas de l'extraction d'une racine. Elle est impossible lorsqu'il s'agit d'extraire une racine d'indice pair d'un nombre négatif. L'expression $\sqrt[2k]{-N^2}$ n'a pas de sens, puisque tout nombre élevé à une puissance paire donne un nombre positif.

Suivant la préparation des élèves, on s'arrêtera là en faisant simplement constater la restriction qui s'impose. De la même manière pour l'expression $b = \log_a c$, qui n'a de sens que si

c est positif, puisque, par hypothèse la base a est positive, et que par ce fait a^b reste positif.

Si, par contre, on veut lever ces restrictions on est conduit à une nouvelle extension de la notion de nombre. Cette *quatrième extension* consiste à introduire les *nombres imaginaires ou complexes*. Leur introduction a uniquement pour but de donner aux énoncés à la fois plus de généralité et plus de simplicité. Il s'agit de remplacer dans les calculs le symbole du nombre par un symbole plus général contenant, comme cas particulier, l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels, c'est-à-dire des nombres *réels*.

Cette extension se présente pour la première fois à l'occasion de la résolution de l'équation du second degré. Si nous prenons la forme générale $ax^2 + bx + c = 0$, les racines ne sont réelles que si l'on a $b^2 - 4ac \geq 0$. Si, par contre, on a $b^2 - 4ac < 0$, il n'existe aucun nombre réel vérifiant l'équation proposée et l'on en déduit que le problème qui a conduit à cette équation est impossible.

L'expression que l'on obtient pour les racines peut, dans ce cas, être mise sous la forme

$$x = p \pm q\sqrt{-1}$$

p et q étant des nombres réels.

Par opposition aux nombres réels, on dit que cette expression représente un nombre *imaginaire* ou *complexe*. Si l'on introduit le symbole i , tel que

$$i^2 = -1,$$

les expressions

$$x = p + qi \quad \text{et} \quad x = p - qi$$

vérifieront l'équation proposée; on dit alors que les racines de cette équation sont imaginaires.

On se trouve ainsi en présence d'un symbole nouveau renfermant comme cas particulier (pour $q = 0$) les nombres réels. Il s'agira de reprendre sur ces nouveaux nombres les définitions de l'égalité et des opérations fondamentales. On montre en Algèbre non seulement que les propriétés fondamentales subsistent, mais encore que les nombres imaginaires soumis aux sept

opérations n'exigent aucune nouvelle extension de la notion de nombre.

Il y a lieu de justifier la dénomination de nombre *complexe* employée dans le même sens par beaucoup de géomètres.

On appelle *nombre complexe* un ensemble de deux ou de plusieurs nombres réels se rapportant à des unités particulières. Un nombre imaginaire peut être envisagé comme l'ensemble de deux nombres réels exprimant deux unités différentes, l'une étant représentée par 1, l'autre par le symbole i . Mais, tandis que pour les nombres complexes employés dans la vie ordinaire les unités ont entre elles des rapports numériques très simples, les deux unités qui interviennent dans les nombres imaginaires sont irréductibles entre elles.

7. — Le symbole $p + qi$ ayant été introduit à l'occasion de la résolution de l'équation du second degré, on peut se demander si les équations d'un degré supérieur n'exigeront pas de nouveaux symboles. La réponse appartient au domaine de l'Algèbre supérieure; on y démontre, comme principe fondamental de la théorie des équations, que les racines d'une équation algébrique, à coefficients réels ou imaginaires, sont de la forme $p + qi$.

Si maintenant l'on considère l'ensemble des nombres imaginaires on peut les répartir en deux catégories : 1° ceux qui vérifient une équation algébrique entière à coefficients entiers; 2° ceux qui ne vérifient pas une pareille équation. On est ainsi conduit aux définitions suivantes : on appelle *nombre algébrique* (dans le sens que l'on attribue à ce terme en mathématiques supérieures ⁽¹⁾) toute racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers. Tout nombre non algébrique est dit *transcendant*.

Si donc on se limite au domaine des nombres réels, il y a lieu de faire une distinction entre les nombres irrationnels. Un nombre irrationnel peut être algébrique ou transcendant. Ainsi, la racine carrée de 5 est un nombre irrationnel algébrique; ce nombre est solution de l'équation

$$x^2 - 5 = 0.$$

(1) En Algèbre élémentaire, certains auteurs emploient aussi ce terme dans le sens de nombre réel positif ou négatif.

Par contre les nombres que l'on désigne d'ordinaire par les lettres π (rapport de la circonférence au diamètre) et e (base des logarithmes népériens) appartiennent à la catégorie des nombres irrationnels transcendants.

En résumé c'est le symbole $p + qi$, par lequel on définit le nombre imaginaire, qui constitue la forme la plus générale sous laquelle on envisage la notion de nombre dans les mathématiques supérieures. Suivant que le nombre réel q est nul ou différent de zéro, ce symbole représente un nombre réel ou imaginaire.

B. — APERÇU HISTORIQUE

Après avoir examiné les diverses extensions de la notion de nombre dans leur développement logique, il est intéressant de jeter un coup d'œil rapide sur leur développement historique⁽¹⁾.

8. *Nombres négatifs.* — Les anciens se bornaient dans leurs calculs à l'emploi des nombres *réels positifs*. Au point de vue historique les nombres négatifs viennent donc après les nombres fractionnaires et irrationnels. Ils ont été pris en considération, pour la première fois, croit-on, au XII^e siècle, par le mathématicien hindou BHASKARA, puis par les Arabes, qui ont servi d'intermédiaires entre les Grecs, les Indiens et les Occidentaux. Au XVI^e siècle CARDAN, en Italie, STIFEL, en Allemagne, et HARRIOT, en Angleterre, portent leur attention sur les nombres négatifs; mais ce ne fut qu'avec DESCARTES (1596-1650) que ces nombres furent employés d'une façon systématique dans les calculs.

9. *Nombres fractionnaires.* — L'emploi des nombres fractionnaires remonte à la plus haute antiquité. Les *Égyptiens* ramènent les fractions à des fractions *types* dont le numérateur est l'unité; par exemple, ils remplacent $\frac{2}{9}$ par la somme des fractions $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{18}$. Les *Babyloniens* et les *Grecs* emploient de préférence pour les fractions le *système sexagésimal*; ainsi PTOLÉMÉE (150 ans

(1) Ces renseignements historiques sont empruntés, pour la plupart, aux *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* de M. M. CANTOR, et à l'*Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften*.